# 88年度　台中區競試二解答

一、$\because (x_1+x_2)^2 \ge 4x_1x_2$

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\ge\frac{4}{x_1+x_2}$$

同理 $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} \ge \frac{4}{x_2+x_3}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1} \ge \frac{4}{x_n+x_1}$

將以上的式子相加即可得證。

二、$\overline{AB}^2=\overline{BQ}^2=(\overline{BP}+\overline{PQ})^2$

$=\overline{BP}^2+\overline{PQ}^2+2\overline{BP}\cdot\overline{PQ}$

$\overline{AC}^2=\overline{CP}^2=(\overline{CQ}+\overline{PQ})^2$

$=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2+2\overline{CQ}\cdot\overline{PQ}$

$\therefore \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BP}^2+2\overline{PQ}^2+\overline{CQ}^2+2\overline{BP}\cdot\overline{PQ}+2\overline{CQ}\cdot\overline{PQ}$

另一方面，

$\overline{BC}^2=(\overline{BP}+\overline{PQ}+\overline{CQ})^2$

$=\overline{BP}^2+\overline{PQ}^2+\overline{CQ}^2+2\overline{BP}\cdot\overline{PQ}+2\overline{PQ}\cdot\overline{CQ}+2\overline{CQ}\cdot\overline{BP}$

$\therefore \overline{PQ}^2=2\overline{BP}\cdot\overline{QC}$

三、設夫收入$a$元，妻收入$b$元

(i) 假設$b\ge a$，令$x=\frac{b}{a}\ge 1$

$(1+x^{1/p})^p=C_0^p+C_1^p x^{1/p}+C_2^p x^{2/p}+\cdots+C_p^p x$

$=1+\square+x$

其中□為正數

分母 $= 2\sin x \cdot \sin y$

所以 $\left|\dfrac{\cos kB\cos A-\cos kA\cos B}{\cos B-\cos A}\right| \le \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\sin(k-1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\dfrac{\sin(k+1)y}{\sin y}\right|$

$$+\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin(k-1)y}{\sin y}\right|$$

$$\le \frac{1}{2}(k-1)(k+1)+\frac{1}{2}(k+1)(k-1)\text{(由}(i))$$

$$=k^2-1$$

$\therefore \left(1+x^{1/p}\right)^{p} \geq 1+x \Rightarrow 1+x^{1/p} \geq (1+x)^{1/p}$

$\Rightarrow a^{1/p}+b^{1/p} \geq (a+b)^{1/p}$

∴合併申報

四、列關係式: $\begin{cases} c^2=a^2+b^2 & ① \\ a+b+c=1000 & ② \end{cases}$

以 $c=1000-a-b$ 代入①

可得 $(1000-a)(1000-b)=2^5\cdot 5^6$

恰只有 $\begin{cases} 1000-a=5^4 \\ 1000-b=5^2\cdot 2^5 \end{cases}$ 適合（或交換）

於是 $(a,b,c)=(200,375,425)$，$(375,200,425)$

五、設 $a=p+iq$，$b=r+is$，$(p,q,r,s\in R)$

由假設知 $|p(1)|=|p(-1)|=|p(-i)|=|p(i)|=1$

計算得知 $4=|p(1)|^2+|p(-1)|^2+|p(i)|^2+|p(-i)|^2$

$=4+4\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right)$

所以 $p=q=r=s=0$，即 $a=b=0$