

教育部八十八學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題(二) 編號: _____

(時間一小時) (學生自填)

注意事項:

1. 本試卷共五題，每題均為六分，滿分為三十分。
2. 考試時間：1小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案卷內。

(一) 設 x_1, x_2, \dots, x_n 均為正數，證明

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq 2 \left(\frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} + x_n} + \frac{1}{x_n + x_1} \right)$$

(二) $\triangle ABC$ 為一直角三角形，其中 $\angle BAC = 90^\circ$ ，以 B 為圓心， \overline{BA} 為半徑畫弧交 \overline{BC} 於 Q ，再以 C 為圓心， \overline{CA} 為半徑畫弧交 \overline{BC} 於 P ，證明 $\overline{PQ}^2 = 2\overline{BP} \cdot \overline{QC}$ 。

(三) 某國稅制如下：個人申報者，要繳交個人所得的 p 次方根 $(\sqrt[p]{\cdot})$ 作為稅金；夫妻合併申報者，須繳交兩人收入總和的 p 次方根作為稅金； p 為大於1的整數(隨政府需要調整)。今有夫妻兩人，他們該採何種申報方式(分開申報或合併申報)才能節稅？試證明你的結論。

(四) 設 a, b, c 為某直角三角形的三邊長，其中 c 為斜邊長，已知 a, b, c 皆為整數且其總和恰為1000，請求出 a, b, c 之值。

(五) 考慮一複係數的二次多項式 $P(z) = z^2 + az + b$ ，其中 z 為複數，已知當 $|z| = 1$ 時

則 $|P(z)| = 1$ ，試證明 $a = b = 0$ 。