88校複賽 台中區競試一解答

一、假設$L: y=tx$

$\Rightarrow$距離平方和為$f=\dfrac{(a-t)^2+(b-t)^2}{1+t^2}=2+\dfrac{-2(a+b)t+(a^2+b^2-2)}{1+t^2}$

(1) as $a+b=0$，$f=\dfrac{2(a^2-1)}{1+t^2}+2$

若$|a|\le 1 \Rightarrow$取$t=0$時（$y=0$為2）

$f=2a^2$為min

若$|a|>1 \Rightarrow$取$t=\infty$時 $(L: x=0) \Rightarrow$

$f=2$為min

(2) $b=0, a>0$

$f=2+\dfrac{-2at+(a^2-2)}{1+t^2}$

let $x=f-2 \Rightarrow xt^2+2at-(a^2-2)+x=0$

有解 if $\Delta=a^2-x(-a^2+2+x)=0$

at $t=\dfrac{-a}{x}$

由$\Delta=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2+a^2\pm\sqrt{(a^2-a)^2+4a^2}}{2}$

$\therefore t=\dfrac{c\mp\sqrt{c^2+4a^2}}{2a}$ $\quad c^2=a^2-2$

t應為正

$\therefore t=\dfrac{a^2-a+\sqrt{(a^2-a)^2+4a^2}}{2a}$

二、令$x=1$

(☆) $f(1+yf(1))=f(1)+f(y)$，$\forall y\in R$

若 $f(1)\neq 1$，取$y=\dfrac{1}{1-f(1)}$代入(☆)

$f\left(\dfrac{1}{1-f(1)}\right)=f(1)+f\left(\dfrac{1}{1-f(1)}\right)$

$\Rightarrow f(1)=0$

$\Rightarrow$代入(☆)得f為零函數，矛盾。

因此 $f(1)=1$

代入(☆)得 $f(1+y)=1+f(y)$，$\forall y\in R$

$\therefore f(2)=1+f(1)=2$

$$f(3)=1+f(2)=3$$

$$\vdots$$

$$f(n)=n\text{，}\forall n\in N$$

三、(a) 設 $a=a_0+e$，$b=a_0+ew$，$c=a_0+ew^2$

其中 $a_0,e\in C$，而 $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$（滿足 $1+w+w^2=0$ 或 $w^3=1$）

代入可得！

(b) 令 $a-b=A$，$b-c=B$，則 $a-c=B+A$

於是 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，則 $ac=B+A$

即有 $A^2+AB+B^2=0$，解之可得 $A=Bw$ 或 Bw^2

其中 $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則 $c-a=B+A=B(1+w)$ 或 $B(1+w^2)$

不難證明 $|A|=|B|=|B+A|$，即 $|a-b|=|b-c|=|c-a|$

四、(1) $xy=[x,y](x,y)$

$\because (x,y)|x-y$

$\therefore (x,y)\le x-y$

因此 $xy\le[x,y](x-y)$

(2) 使用數學歸納法

① $i=1$：$a_1\le n$ OK

② 設 $ja_j\le n$，在 $i=j+1$ 時

$$\begin{aligned}a_ja_{j+1}&=(a_j,a_{j+1})[a_j,a_{j+1}]\\&\le n(a_j,a_{j+1})\\&\le n(a_j-a_{j+1})\end{aligned}$$

$$a_{j+1}<\frac{na_j}{n+a_j}=\frac{n}{\dfrac{n}{a_j}+1}\le\frac{n}{j+1}$$

$\therefore (j+1)a_{j+1}\le n$

由歸納法得證！

五、(i) 由數學歸納法即可得證。

(ii) 設 $x=\dfrac{A-B}{2}$，$y=\dfrac{A+B}{2}$，那麼

$$\begin{aligned}\text{分子}&=\frac{1}{2}[\cos(kB+A)+\cos(kB-A)-\cos(kA+B)-\cos(kA-B)]\\&=\frac{1}{2}[\cos(kB+A)-\cos(kA+B)]+\frac{1}{2}[\cos(kB-A)-\cos(kA-B)]\\&=\sin(k-1)x\cdot\sin(k+1)y+\sin(k+1)x\cdot\sin(k-1)y\end{aligned}$$