教育部八十八學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）　編號：＿＿＿＿＿＿

（時間二小時）　　（學生自填）

注意事項：

1.本試卷共五題，每題均爲十四分，滿分爲七十分。
2.考試時間：2小時。
3.計算紙必須連同試卷交回。
4.不可使用計算器。
5.請將答案寫在答案卷內。

（一）平面上兩點A,B，座標分別為$(1,a),(1,b)$，請分別在條件(1)和(2)的要求下，各求出一過原點的直線L，使得A,B兩點到L之「垂直距離」的平方和為最小。

(1) 假設$a+b=0$

(2) 假設$b=0$，而$a>0$

（二）設f為由實數映到實數的函數且f不為零函數。若對任意實數x,y，$f(x+yf(x))=f(x)+xf(y)$皆成立，試證明：對每一個正整數n，$f(n)=n$

（三）設a,b,c是三個不全相同的複數，試證明：

(1) 如果a,b,c恰好是複數平面上某正三角形的三頂點，則$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

(2) 反之，如果$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$則$a,b,c$恰好是複數平面上某正三角形的三頂點。

（四）(1) 設x,y為自然數且$x>y$，證明$x\cdot y\le[x,y]\cdot(x-y)$，其中$[x,y]$代表$x$和$y$的最小公倍數。

(2) 設$n\ge a_1>a_2>\cdots>a_k$均為正整數，若對$i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$，$i\ne j$ 恆有a_i與a_j之最小公倍數小於n，則對每一個$i=1,2,\cdots,k$證明 $i\cdot a_i\le n$

（五）設A,B是實數，k是一正整數，且$\cos A\ne\cos B$，

(1) 證明：對每一實數x及每一自然數n，不等式$|\sin(nx)|\le n|\sin x|$恆成立。

(2) 證明：$\left|\dfrac{\cos kB\cdot\cos A-\cos kA\cdot\cos B}{\cos B-\cos A}\right|\le k^2-1$