八十八學年度高級中學數學能力競賽試題(二)參考題答(台南一中)

1.参考解答

若$x>0$，則$y=x+\frac{1}{x}>x=z+\frac{1}{z}>z=y+\frac{1}{y}>y$此為一矛盾

同理$x<0$則矛盾

故無解

2.参考解答

令此公比為r，則$a_k=a_1r^{k-1}$，k=1, 2,⋯

前 n 項幾何平均值為 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left[a_1\cdot a_1r\cdots(a_1r^{n-1})\right]^{\frac{1}{n}}=$

$\left[a_1r^{1+2+\cdots+(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}}=a_1r^{\frac{(n-1)n}{2n}}=a_1r^{\frac{n-1}{2}}$

前 13 項幾何平均值為a_1r^6　$\therefore \frac{1}{64}r^6=64\Rightarrow r^6=64^2=4^6$

$\therefore r=4$，設x表示剩下12項中r的指數之和

$\therefore a_1r^{\frac{x}{12}}=32$　　$4^{\frac{x}{12}}=4^{\frac{11}{2}}$　故$x=66$

因$1+2+\cdots\cdots+13=\frac{13\cdot 14}{2}=78$　　$\therefore$去掉的項是第$(78-66)$項，

即第 12 項　，公比為 4

3.参考解答

若$1999=a^2+b^2$則a^2+b^2被 5 除的餘數是$4\Rightarrow a^2$或b^2中必有一個是 5 的倍數，故$a=5k, k=1,2,3,4,5,6,7,8$ $(\because 45^2>1999)$

$\therefore a^2=25, 100, 225, 400, 625, 900, 1225, 1600$

$b^2=1999-a^2=1974, 1899, 1774, 1599, 1374, 1099, 774, 399$

以上 8 個數字皆不是某一個整數的平方，故 1999 不可能表成 a^2+b^2 #

4.參考解答

(b) n =k+1 時

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}})$$

$$=(\sum_{n=1}^{k}a_n+a_{k+1})(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{k+1}})$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{k}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{a_n}\right)+\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{a_n}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_n}\right)+1\geq k^2+2k+1=(k+1)^2$$

(c) $$\left[(s-a)+(s-b)+(s-c)\right]\cdot\left[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right]\geq 9$$

$$s(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c})\geq 9$$

$$1+\frac{a}{s-a}+1+\frac{b}{s-b}+1+\frac{c}{s-c}\geq 9$$

$$\Rightarrow\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geq 6$$

5.參考解答

設三邊長分別為 $x-1, x, x+1$, 且 $\angle C=2\angle A$

$\therefore \overline{BC}=x-1<x=\overline{AC}<\overline{AB}=x+1$

作 $\angle C$的平分線 $\overline{AD}$交 $\overline{AB}$ 於 D點 　　$\therefore \angle 1=\angle A$

$\therefore\triangle ABC\sim\triangle CBD$ 　$\therefore\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{BD}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}$

由內角平分線性質知，$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\Rightarrow\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}+\overline{BD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$，

$\because\overline{BD}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}}$ 　$\therefore\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$ 　$\therefore(\overline{AC}+\overline{BC})\overline{BC}=\overline{AB}^2$

6.參考解答

$\because (x-1)^2\geq 0\therefore x^2+1\geq 2|x|$ 　$\Rightarrow\frac{|x|}{1+x^2}\leq\frac{1}{2}$

故 $$\frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\leq\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)}+\frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\leq\frac{|x|}{1+x^2}+\frac{|y|}{1+y^2}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$