臺灣省第三區高級中學八十八學年度
數學科能力競賽試題(二)(新竹高中)

填充題答案：

1. 4, 2. $-\frac{1}{6}$, 3. 18 或 9, 4. $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, 5. 1955, 6. $\frac{2}{3}$.

參考解答：

1. 4

坐標化，考慮$(\sqrt{ab},a)$落在直線$\frac{x}{b}+\frac{y}{\sqrt{ab}}=1$的條件。

2. $-\frac{1}{6}$ 。

因為x_1及x_2為方程式$x^2-5px-p=0$的二相異實根，所以

$$x_1^2=5px_1+p \text{ 且 } x_2^2=5px_2+p \text{ 。}$$

因此，

$$\begin{aligned}5px_1+x_2^2+3p&=5px_1+5px_2+p+3p\\&=5p(x_1+x_2)+4p\\&=25p^2+4p\text{。}\end{aligned}$$

同理，

$$5px_2+x_1^2+3p=25p^2+4p\text{ 。}$$

因為$x^2-5px-p=0$有二相異實根x_1及x_2，所以$p\neq 0$且$(x_1+x_2)^2\geq 4x_1x_2$。由此可得

$$25p^2+4p>0\text{ 。}$$

因此由算幾不等式可知

$$\frac{p^2}{5px_1+x_2^2+3p}+\frac{5px_2+x_1^2+3p}{p^2}\geq 2\text{ ，}$$

且等號成立若且唯若$25p^2+4p=p^2$。所以$p=-\frac{1}{6}$；即$f(p)$在$p=-\frac{1}{6}$時有極小值2。

3. 18 或 9 。

因為$9\,|\,(n-a)$且已知$9\,|\,n$，所以$9\,|\,a$。同理，可知$9\,|\,(a-b)$，因而$9\,|\,b$。因為n為88位數，而各數碼均不大於9，所以它的數碼之和$a\leq 9\times 88=792$。所以a至多是一個不大於792的三位數；因而$b<3\times 9=27$。事實上，不大於792的三位數各位數字之和的最大值為$b\leq 2\times 9+6=24$，即b為不大於24的數。但是$9\,|\,b$，由此可知$b=18$或9(n為一個各位數之數字均為9的88位數時，$b=18$；n為一個前面的78位數之數字均為9且最後的10位數字為0的88位數時，$b=9$)。

4. $\underline{\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$。

設稜長為 1，則底面正五邊形的對角線長為 2sin54°，所以側面的二個相鄰三角形的中線與對角線所形成的三角形，利用餘弦定理。

5. $\underline{\ \ 1955\ \ }$。

任意的自然數 k 有唯一的質因數分解式

$$k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{\alpha_n}\text{，}$$

則

$$d(k) = (\alpha_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha_n + 1)\text{。}$$

只有在所有的 α_i，$i = 1, 2, \cdots, n$ 都是偶數時(此時 k 為平方數)，$d(k)$ 才是奇數。因為 $44^2 = 1936 < 1999 < 45^2 = 2025$，所以在 1, 2, …,1999 中恰有 44 個平方數。故只有 44 位同學所拿的紙板所呈現的顏色為紅色，因而有 $1999 - 44 = 1955$ 位同學所拿的紙板所呈現的顏色為白色。

6. $\underline{\frac{2}{3}}$。

令 $a = 2 + \cos x$，$h(a) = a + \frac{1}{a}$，則 $1 \le a \le 3$ 且

$$2 = h(1) \le h(a) \le h(3) = \tfrac{10}{3}\text{。}$$

因此，

$$f(y) = \max\left|2y - 3 + h(a)\right| = \max\left\{\left|2y - 1\right|, \left|2y + \tfrac{1}{3}\right|\right\}\text{。}$$

由函數 f 的圖形可知，

$$\min f(y) = f(\tfrac{1}{6}) = \tfrac{2}{3}\text{。}$$