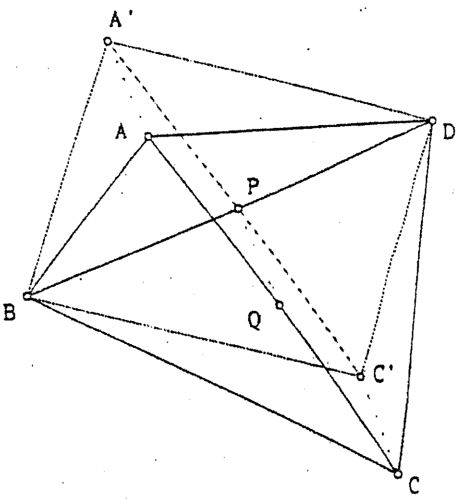
臺灣省第三區高級中學八十八學年度數學科
能力競賽試題(一)參考解答(新竹高中)



1. 將 A、C 平移到 A'、C' 使得他們的平移向量為 QP

$CD^2=CC'^2+C'D^2-2CC'\cdot C'D\cos\angle CC'D$

$CB^2=CC'^2+C'B^2-2CC'\cdot C'B\cos\angle CC'B$

$AD^2=AA'^2+A'D^2-2AA'\cdot A'D\cos\angle AA'D$

$AB^2=AA'^2+A'B^2-2AA'\cdot A'B\cos\angle AA'B$

且 $\angle CC'D+\angle AA'B=180°$

$\angle CC'B+\angle AA'D=180°$

$AA'=CC'=PQ, C'D=A'B, C'B=A'D.$

$A'B^2+BC'^2+C'D^2+DA'^2=A'C'^2+BD^2=AC^2+BD^2$

因此 $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2$。

2. 本問題等價於證明：實數 $x_i, i=1,\cdots,n$ 滿足 $|x_i|\le 1$ 且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，則 $\left|\sum_{i=1}^{n}ix_i\right|\le\left[\frac{n^2}{4}\right]$。

若 $\sum_{i=1}^{n}ix_i\le\left[\frac{n^2}{4}\right]$，則以 $-x_i$ 取代 x_i，我們可得 $\sum_{i=1}^{n}ix_i\ge-\left[\frac{n^2}{4}\right]$。因此，我們僅需證明 $\sum_{i=1}^{n}ix_i\le\left[\frac{n^2}{4}\right]$。如果 n 為偶數，即 $n=2k$；則 $\left[\frac{n^2}{4}\right]=k^2$。然而，

$$\underbrace{2k}_{n}+(\underbrace{2k-1}_{n-1})+\cdots+(k+1)-k-(k-1)-\cdots-1=k^2$$ 。

所以

$$\begin{aligned}\left[\frac{n^2}{4}\right]-\sum_{i=1}^{n}ix_i&=n+\cdots+(k+1)-k-\cdots-1-\sum_{i=1}^{n}ix_i\\&=n(1-x_n)+\cdots+(k+1)(1-x_{k+1})-k(1+x_k)-\cdots-(1+x_1)\\&\ge k[(1-x_n)+\cdots+(1-x_{k+1})-(1+x_k)-\cdots-(1-x_1)]\\&=-k(x_n+\cdots+x_1)=0\end{aligned}$$

如果 n 為奇數，即 $n=2k+1$；則 $\left[\frac{n^2}{4}\right]=k^2+k$。然而，

$$n+\cdots+(k+2)+0-k-\cdots-1=k^2+k$$ 。

所以

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]-\sum_{i=1}^{n} ix_i = n+\cdots+(k+2)+0-k-\cdots-1-\sum_{i=1}^{n} ix_i$$

$$= n(1-x_n)+\cdots+(k+2)(1-x_{k+2})-(k+1)x_{k+1}-k(1+x_k)\cdots-(1+x_1)$$

$$\geq (k+1)[(1-x_n)+\cdots+(k+2)(1-x_{k+2})-x_{k+1}-(1+x_k)-\cdots-(1+x_1)]$$

$$= -(k+1)(x_n+\cdots+x_1)=0.$$

所以，$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$；因而，$\left|\sum_{i=1}^{n} ix_i\right| \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$。

3. 令 $P=\{p,q_1,q_2,\cdots,q_n\}$是一個滿足這樣條件的質數所成的集合。首先我們可觀察出 $2\notin P$。事實上，若 $2=q_1\in P$，則

$$\frac{p+2+q_2+q_3+\cdots+q_n}{n+1}=21,$$

其中 $p,q_1,q_2,\cdots,q_n$ 是相異的奇質數。上式等價於

$$p+q_2+\cdots+q_n=21(n+1)-2。$$

(1) 若 n 為奇數，則上式的左邊為奇數，而右邊為偶數，矛盾！

(2) 若 n 為偶數，則上式的左邊為偶數，而右邊為奇數，矛盾！

其次，因為 21 不是質數，所以 P 中最大的質數 $p>21$。顯然，若我們將 P 中大於 21 的質數去掉，則剩下的數之算術平均數會變小；同樣地，若增加小於 21 的質數也會使得算術平均數變小。於是，

$$\frac{3+5+7+11+13+17+19+p}{8}\leq 21。$$

由此可得 $p\leq 93$。由於 p 為質數，故 $p\leq 89$。因為下列的集合 P 滿足所求，所以 $p=89$；而

$$P=\{3,5,7,11,13,17,23,89\}。$$