

臺灣省第三區高級中學八十八學年度
數學科能力競賽試題(一)(新竹高中)

編號：_____

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分，第一、二題各 16 分，第三題 17 分。
2. 考試時間 2 小時。
3. 請將答案寫在答案卷上。
4. 計算紙必須連同答案卷繳回。

一· 在凸四邊形 $ABCD$ 中， P 和 Q 分別為凸四邊形 $ABCD$ 中兩對角線之中點，試證：
 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$ 。

二· 設實數 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ ，滿足： $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \dots + \cos\theta_n = 0$ 。試證

$$|\cos\theta_1 + 2\cos\theta_2 + \dots + n\cos\theta_n| \leq \left[\frac{n^2}{4} \right],$$

其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。

三· 試求滿足下列條件的最大質數 p ：存在一組比 p 小的相異質數 q_1, q_2, \dots, q_n ，使得 p, q_1, q_2, \dots, q_n 的算術平均數為 21。