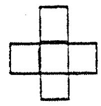
臺灣省第三區高級中學八十八學年度

數學科能力競賽口試題(二)(新竹高中)

2. 同時使用下圖所示的兩種骨牌：一字形骨牌A及十字形骨牌B可以拼成$n\times n$單位的方格表。試求所有可能的正整數n。

骨牌A：由兩個單位方格組成

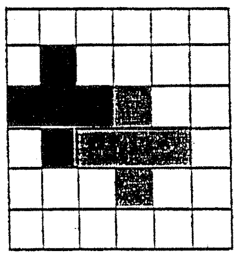
骨牌B：由五個單位方格組成



參考解答：

2. 所求的正整數$n=2k$，其中k為不小於3的正整數。

顯然，我們可以用13個骨牌A及2個骨牌B拼湊成一個6×6單位方格表，如下圖。



由此再填加一些骨牌A，即可拼成任一$2k\times 2k$單位的方格表，其中$k\geq 3$。接下來我們證明：同時使用骨牌A及骨牌B無法拼成$(2k-1)\times(2k-1)$單位的方格表。首先我們以黑、白兩色將此方格表塗成一西洋棋盤，使得四個角落的顏色都是白色，則棋盤上黑色格子的數目為$c=\frac{1}{2}((2k-1)^2-1)$，而棋盤上白色格子的數目為$c+1$。當我們使用一個骨牌A覆蓋在方格表上時，恰好都有一個白色方格及一個黑色方格被覆蓋住；而使用一個骨牌B覆蓋在方格表上時，則恰好有一個白色方格及四個黑色方格被覆蓋住，或恰好有一個黑色方格及四個白色方格被覆蓋住。現在我們來考慮用骨牌B覆蓋時中心格子的顏色：令a表示覆蓋中心白色格子的骨牌B之數目，b表示覆蓋中心黑色格子的骨牌B之數目，則沒有被骨牌B覆蓋的格子中有$c+1-a-4b$個白色的格子及$c-b-4a$個黑色的格子。注意：這些沒有被骨牌B覆蓋的格子恰被骨牌A完全覆蓋。因此，

$$c+1-a-4b=c-b-4a$$

由此可得$3(b-a)=1$，矛盾。