88數校　嘉義區競試二解答

一、$\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}<\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}=\frac{1}{2^{s-1}}$

$\frac{1}{4^s}+\cdots+\frac{1}{7^s}<4\cdot\frac{1}{4^s}=\frac{1}{4^{s-1}}$

$\vdots$

$\frac{1}{\left(2^k\right)^s}+\cdots+\frac{1}{\left(2^{k+1}-1\right)^s}<2^k\cdot\frac{1}{2^{ks}}=\frac{1}{\left(2^k\right)^{s-1}}$

$\therefore 1+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}<1+\frac{1}{2^{s-1}}+\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2+\cdots$

$=1+\frac{1}{2^{s-1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}\right)$

二、設 $AM=\lambda AB, BK=\mu BC$

$CL=\rho CA$，則 $BM=(1-\lambda)AB$，$CK=(1-\mu)BC$，$AL=(1-\rho)AC$

$\frac{\Delta BMK}{\Delta ABC}=\frac{BM\cdot BK}{AB\cdot BC}=\mu(1-\lambda)$

$\frac{\Delta AMK}{\Delta ABC}=\frac{AM\cdot AK}{AB\cdot AC}=\lambda(1-\rho)$

$\frac{\Delta AML}{\Delta ABC}=\frac{CK\cdot CL}{AB\cdot BC}=\rho(1-\mu)$

$\left(\frac{\Delta AML}{\Delta ABC}\right)\left(\frac{\Delta BMK}{\Delta ABC}\right)\left(\frac{\Delta CKL}{\Delta ABC}\right)$

$=\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)\rho(1-\rho)\leq\left(\frac{1}{4}\right)^3$

利用 $x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$

便知左端三個式中至少有一個不大於$\frac{1}{4}$

三、若a,b,c全為正數或n為偶數，則

$$1<\sqrt[3]{(abc)^n}=\sqrt[3]{a^n\cdot b^n\cdot c^n}\le\frac{1}{3}\left(a^n+b^n+c^n\right)$$

因此$a^n+b^n+c^n>3$

如果其中之一（例如a）為正數，其餘兩數為負$(b<0,c<0)$

則有　$a>3+|b|+|c|$，利用數學歸納法可證得

$$a^n>3^n+|b|^n+|c|^n \text{（}n\text{為任意自然數）}$$

或　$a^n+b^n+c^n>3^n$（n為奇數）

四、因$\left(x^{2n}+x^n+1\right)\left(x^n-1\right)=x^{3n}-1=\left(x^3-1\right)\left(x^{3n-3}+x^{3n-6}+\cdots+1\right)$

所以x^2+x+1整除$\left(x^{2n}+x^n+1\right)\left(x^n-1\right)$

當3不整除n時，x^2+x+1和x^n-1互質，故x^2+x+1整除$x^{2n}+x^n+1$

當3整除n時，$w^{2n}+w^n+1=1$其中$w^2+w+1=0$，故x^2+x+1不整除$x^{2n}+x^n$

因此能使x^2+x+1整除$x^{2n}+x^n+1$的正整數n正好是那些不能被3除盡的正整