

教育部八十八學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一） 編號：_____

（時間二小時） （學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題，每題均為十分，滿分為四十分。
 2. 考試時間：2小時。
 3. 計算紙必須連同試卷交回。
 4. 不可使用計算器。
 5. 請將答案寫在答案卷內。
-

（一）設 $n > 5$ 為整數，假設 (a, b) 為直線 $x=0, y=0, x=n, y=n$ 所圍成正方形上（包含邊界）的格子點，試問 $a+b$ 為 5 的倍數的點有多少？

（二）在平面有 m 個多邊形，每個多邊形的邊數不限，這些多邊形滿足下列條件：

- (1) 任兩多邊形必需共用至少一邊，
- (2) 任兩多邊形之內部不能相交，

試問 m 之最大值為何？

（三）若 $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n}$ ， m, n 為整數， p 為大於 2 之質數。試證 m 是 p 的倍數。

（四）設 a_0, a_1, \dots, a_6 為七個相異的實數，考慮七個六次多項式

$$L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x), L_4(x), L_5(x), L_6(x), \text{ 其中 } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^6 \frac{(x - a_j)}{(a_i - a_j)}$$

(1) 證明 $x^k = \sum_{j=0}^6 L_j(x) a_j^k$ ，對於 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$

(2) 證明 $\sum_{j=0}^6 L_j(0) a_j^7 = a_0 a_1 a_2 \dots a_6$