

臺灣省第四區高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(二) (台中一中)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共四題計算證明題, 滿分 21 分.
2. 考試時間: 1 小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一、設 $0 \leq p, q \leq 1$, 請問 p, q 為何值時可使

$$f(p, q) = (4 - 3p)^2(3 - 2q)^2(p + q)$$

的值最大, 且其值為何?

二、試證明對於自然數 n , $2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{2n-1}$ 皆不為完全平方數.

三、求一定義在非零實數上的函數 $f(x)$, 使得對所有的 $x \neq 0$, 都有

$$\pi f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \pi x^2.$$

四、在 $\triangle ABC$ 內任取一點 P , 連接 AP, BP, CP 並延長之, 設分別交對邊於 D, E, F .

(a) 求證: $\frac{PD}{AP} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CP} = 1$.

(b) 求證: $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$.