

臺灣省第三區高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(二) (新竹高中)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共六題填充題, 每一題3.5分, 共21分.
2. 考試時間: 1小時.
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

1. 考慮以下的展開式

$$(1+x^{2^1})(1+2x^{2^2})\cdots(1+87x^{2^{27}}) = 1 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{1998}x^{1998} + \cdots,$$

則 a_{1998} 之值為 (1).

2. 白藍粉刷公司計劃粉刷他們的7層辦公大樓. 為了凸顯公司的標誌, 限制每層樓只能用白色或者是藍色的油漆來粉刷, 而且不能有連續兩層都是藍色的. 試問他們有多少種不同的粉刷方式? 答 (2).

3. 設 Γ 是圓心 $(0,0)$ 而半徑1的單位圓, 點 $P(a,b)$ 為圓 Γ 外部的一個定點, 而點 Q 為圓 Γ 上的一個動點. 若點 P, Q, R, S 依逆時針方向形成一正方形的四個頂點. 試問當動點 Q 繞圓 Γ 一圈時, R 點的軌跡方程式為 (3).

4. 設函數 $f: R \rightarrow R$ 定義為 $f(x) = 6x^2 - 4x - 4 + \frac{8}{3x^2 - 2x + 1}$. 試問函數 f 在哪些點會產生最小值? 答 (4).

5. 設 A, B 為一單位正立方體的一雙對頂點, 其中交會於 A 點的三个面為 F_1, F_2, F_3 , 而交會於 B 點的三个稜邊為 BC, BD, BE . 已知一球 S 的球心在該正立方體的內部, 且 S 分別與 $F_1, F_2, F_3, BC, BD, BE$ 相切, 則球 S 的半徑為 (5).

6. 某一城堡有 k 扇門, 每一扇門各裝設一個不同的鎖. 城堡中12個看守的衛兵各持有某些門的鑰匙, 假設他們共持有1998把鑰匙, 其中有些是同一扇門的鑰匙, 而且每一把鑰匙只能打開一扇門. 已知任意4個衛兵都可打開全部的門, 則 k 的最大可能值為 (6).