

臺灣省第三區高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(一)(新竹高中)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共三題計算證明題, 滿分 49 分, 第一題 16 分, 第二題 16 分, 第三題 17 分.
2. 考試時間: 2 小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一. 設無窮數列 a_1, a_2, a_3, \dots 滿足

- (1) 每一項 a_n 都是正整數;
- (2) 對任意的正整數 m, n , 都有 $a_{m \cdot n} = a_m + a_n - 1$;
- (3) 僅有有限個正整數 n 滿足 $a_n = 1$;
- (4) $a_{222} = 4$.

試求 a_{1998} 之值.

二. 設直線 PC 與圓心為 O 的圓相切於 C 點, 線段 CM 垂直 OP 於 M 點, 而 A, B 是該圓上滿足 A, B, P 三點共線的相異兩點. 試證: 直線 CM 是 $\angle AMB$ 的角平分線.

三. 設正整數 a, b 滿足方程式 $(a-1)^b + 1 = a^{b-1}$.

- (a) 試證: 當 $a, b \geq 3$ 時, a 和 b 都是奇數;
- (b) 試求出所有可能的正整數解 (a, b) .