

臺灣省第二區高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(二) (板橋高中)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共六題填充題, 每一題3.5分, 共21分.
2. 考試時間: 1小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

1. 設某夫妻宴請另外5對夫妻用餐, 共12人圍一圓桌而坐. 已知客人中有兩對新婚夫妻必須是夫妻相鄰而坐, 而男女主人為招呼客人不得相鄰, 試問共有多少種不同的坐法?
答: (1).

2. 在坐標平面上, 已知 $P(0, 0)$, $Q(1, 0)$ 為定點, 而動點 $R(x, y)$ 在 $\triangle PQR$ 中滿足 $\angle Q = 2\angle P$, 則動點 R 的軌跡方程式為 (2).

3. 試問有多少個函數 $f: \{1, 2, 3, \dots, 1998\} \rightarrow \{1999, 2000\}$ 滿足 $f(1) + f(2) + \dots + f(1998)$ 的和是偶數. 答: (3).

4. 設 $ABCDEF$ 是一邊長為1的正六邊形, 而 O 為其對稱中心. 已知點列 $\langle P_n \rangle$ 及 $\langle Q_n \rangle$ 滿足

(i) $P_{6k+1} = A, P_{6k+2} = B, P_{6k+3} = C, P_{6k+4} = D, P_{6k+5} = E, P_{6k+6} = F, \forall k = 0, 1, 2, \dots;$

(ii) $Q_1 = A$, 而點 Q_{k+1} 是線段 $Q_k P_{k+2}$ 與 OP_{k+1} 的交點, $\forall k = 1, 2, 3, \dots$.

則線段 OQ_{1998} 的長度為 (4).

5. 對一正整數 n , 我們定義 $S(n)$ 表示 n 的所有正因數之和, 例如: $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. 若 $S(n) = 91$, 則 n 的值為 (5).

6. 設有 n 個正實數 x_1, x_2, \dots, x_n 滿足

$$\sum_{k=1}^n x_k = 48, \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = 36, \quad \sum_{k=1}^n x_k^3 = 27,$$

則 n 的值為 (6).