

臺灣省第一區高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(一)(花蓮高中)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共三題計算證明題, 滿分49分, 第一題15分, 第二題16分, 第三題18分.
2. 考試時間: 2小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一. 小明心裡想一個小於50的正整數, 並將此數與43, 57中的一數相乘, 所得乘數的末2位恰為34. 試問小明心裡想的數為何? 43與57, 他選了那一個數?

二. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n$ 均為正數. 試證:

$$(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3) \\ \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \dots + a_nb_nc_n)^3.$$

三. 設 $\triangle ABC$ 三邊長 $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$, 三內角為 α, β, γ , 面積為 Δ . 設 G 為 $\triangle ABC$ 內部一點滿足 $\angle GAB = \angle GBC = \angle GCA = \omega$. 試證:

$$(1) \cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma.$$

$$(2) \cot \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}.$$