

高雄市高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(二) (高雄中學)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共四題計算證明題, 滿分 21 分.
2. 考試時間: 1 小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一、數列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n \cdot a_{n+1} = n$. 試證: $\sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} \geq 2(\sqrt{n} - 1)$, 其中 n 是自然數

二、圓 C 的圓心坐標是 (x, y) , 圓半徑是 r . 設圓 C 內接正 n 邊形各頂點到原點 $(0, 0)$ 的距離平方和是 d . 試證: $d = n(x^2 + y^2 + r^2)$.

三、對任一實數 a , 令 $[a]$ 表示不大於 a 之最大整數. 設 x 為一實數, 且 $n \geq 2$ 為一正整數, 證明:

$$\left[x - \frac{1}{n} \right] + \left[x - \frac{2}{n} \right] + \cdots + \left[x - \frac{n-1}{n} \right] + \left[x - \frac{n}{n} \right] = [n(x-1)].$$

四、試證: $x^3 - (3a+1)x + (3b-1) = 0$ 沒有整數解 (其中 a, b 為整數).