

高雄市高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(一) (高雄中學)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共四題計算證明題, 滿分 49 分.
2. 考試時間: 2 小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一. 證明一定圓的所有內接三角形中以正三角形的面積最大.

二. 甲生參加一種遊戲, 其規則如下: 投擲一枚公正的六面體骰子, 若出現 6 點, 則贏 1 元, 若不是出現 6 點, 則輸 1 元; 當甲生贏 2 元或輸 2 元時, 甲生立即停止遊戲. 試求甲生贏 2 元會發生在輸 2 元之前的機率?

三. 設 $L_1 = 1, L_2 = 3$ 且 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n = 3, 4, 5, \dots$. 試證: $x^2 - x - 1$ 可整除 $x^{2n} - L_n x^n - (-1)^{n-1}$.

四. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所對之邊分別為 a, b, c . 試證:

$$\frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a + b + c} \geq (\sin A \sin B \sin C)^{\frac{1}{3}}.$$