臺灣省第五區高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(二)(嘉義高中)

編號: ____________________

注意事項:

1. 本試卷共四題計算證明題,滿分21分.
2. 考試時間: 1小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一、證明: $x^{2n}+x^{2n-1}y+\cdots+y^{2n}\geq 0$對所有$x,y\in R$皆成立.

二、已知ΔABC的三中線長各為m_a,m_b,m_c,求證ΔABC的面積

$$=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)},$$

其中$m=\frac{1}{2}(m_a+m_b+m_c)$.

三、設a,b,c,d,m,n,x,y皆為整數且$m=ax+by,\ n=cx+dy$.

(a) 若$ad-bc=1$或-1時,證明: $(m,n)=(x,y)$,亦即m和n的最大公因數等於x和y的最大公因數.

(b) 若$(m,n)=(x,y)$,是否$ad-bc=1$或-1?證明之或舉反例說明之.

四、設$A_n=3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ (n重3), $B_n=8^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{8}}}}}$ (n重8).試證: $A_{n+1}>B_n$對一切自然數n皆成立.