

臺灣省第五區高級中學八十七學年度
數學科能力競賽試題(一) (嘉義高中)

編號: _____

注意事項:

1. 本試卷共四題計算證明題, 滿分 49 分.
2. 考試時間: 2 小時.
3. 計算紙必須連同答案卷交回.
4. 不可使用計算器.
5. 請將答案寫在答案卷內.

一. 費氏數列的定義是 $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3)$. 證明: 對任何自然數 k 與 m, a_{km} 必為 a_k 的倍數.

二. 試證: 在圓內接四邊形 $ABCD$ 中, 若 $\overline{BC} = \overline{CD}$, 則四邊形 $ABCD$ 的面積等於 $\frac{1}{2} \overline{AC}^2 \sin A$.

三. 設 n 表自然數:

(a) 若 n 可寫成二個或二個以上連續自然數的和, 證明:

$$n \notin \{2^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

(b) 若 $n \notin \{2^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$, 試證: n 可寫成二個或二個以上連續自然數的和

四. 設 $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 為一函數, 且滿足

(a) $f(x+y) = f(x)f(y)$ 對一切 $x, y \geq 0$ 皆成立,

(b) $f(2) = 0$,

(c) $f(x) \neq 0$ 對一切 $0 \leq x < 2$ 皆成立.

求證: $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-x}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$