86級嘉義區複賽　競試（二）參考解答

1. $\begin{cases} X_0+X_1+X_2=1 \\ X_1+X_2+X_3=1 \\ \quad\vdots \\ X_9+X_{10}+X_{11}=1 \end{cases}$

觀察 $\begin{cases} X_0+X_1+X_2=4 \\ X_1+X_2+X_3=4 \end{cases}$

和 $\begin{cases} X_3+X_4+X_5=1 \\ X_4+X_5+X_6=1 \end{cases}$

$$\Downarrow$$

$X_0=X_3=X_6$

同理

$X_0=X_3=X_6=X_9$

$X_1=X_4=X_7=X_{10}$

$X_2=X_5=X_8=X_{11}$

所以 由 $X_0+X_1+X_2=1$

可知 $X_0+X_1+X_{11}=1$

可得 $X_1=1-X_0-X_{11}$

$X_3=X_6=X_9=X_0$

故 $X_1=X_4=X_7=X_{10}=1-X_0-X_{11}$

$X_2=X_5=X_8=X_{11}$

2. ○ ○ | ○ … ○ | ○ … ○ ○

$\begin{cases} \text{15 個 0 和 2 個 | 先排列} \\ \text{可得每一個出口人數的所有可能} \end{cases}$

再考慮 15 人的排列法

$\dfrac{(15+2)!}{15!2!}$ 相乘 $\dfrac{(15+2)!}{2!}=\dfrac{17!}{2}$

$15!$

3.觀察到 $\dfrac{1}{1+f^2(x)}+\dfrac{1}{1+f^2(1-x)}$

$$=\frac{1}{1+f^2(x)}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{f^2(x)}}$$

$$=\frac{1}{1+f^2(x)}+\frac{f^2(x)}{1+f^2(x)}=1$$

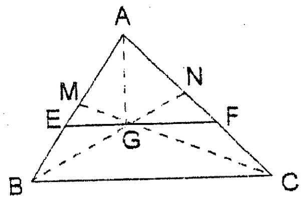
所以

$$\sum_{n=0}^{99}\frac{1}{1+f^2\left(\dfrac{n}{99}\right)}=\frac{1}{1+f^2(0)}+\frac{1}{1+f^2(1)}+\frac{1}{1+f^2\left(\dfrac{1}{99}\right)}+\frac{1}{1+f^2\left(\dfrac{98}{99}\right)}+\cdots$$

$=1\times 50$

$=50$

4.



令 M,N 分別為 AB,AC 中點，利用

$\Delta AEG\le \Delta AB\overset{G}{F}=\Delta AGC=2\Delta AGN\le 2\Delta AGF$

而 ΔAEG 和 ΔAGF 等高，

所以 $\overline{EG}\le 2\overline{GF}$

5. (1) $\cos x\sin y\cos z=\dfrac{\cos z}{2}\cdot\big(\sin(x+y)-\sin(x-y)\big)$

$$\le\frac{\cos z}{2}\cdot\sin(x+y)$$

"=" 成立於 $x=y$

又 $\dfrac{\cos z}{2}\sin(x+y)=\dfrac{\cos z}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)$

$$=\frac{\cos^2 z}{2}\le\frac{\cos^2\frac{\pi}{12}}{2}$$

$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{8}$$

"=" 成立於 $z=\dfrac{\pi}{12}$

因此 $\cos x\sin y\cos z$ 的最大值為 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{8}$，僅當 $x=y=\dfrac{5\pi}{24}, z=\dfrac{\pi}{12}$

(2) $\cos x\sin y\cos z=\dfrac{\cos x}{2}\left(\sin(y+z)+\sin(y-z)\right)$

$$\ge\frac{\cos x}{2}\cdot\sin(y+z)$$

"=" 成立於 $y=z$

又 $\dfrac{\cos x}{2}\cdot\sin(y+z)=\dfrac{\cos x}{2}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

$$=\frac{\cos^2 x}{2}$$

$$\ge\frac{\cos^2\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{1}{8}$$

"=" 成立於 $x=\dfrac{\pi}{3}$

因此 $\cos x\sin y\cos z$ 的最大值為 $\dfrac{1}{8}$，僅當 $y=z=\dfrac{\pi}{12}$ 而 $x=\dfrac{\pi}{3}$

6. 因為$x_1 \le x_2 \le x_3$，所以$6x_3 \ge x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$= x_1 x_2 x_3$$

可得$x_1 x_2 \le 6$

又$x_1 + 2x_2 = (x_1 x_2 - 3)x_3$

所以$x_1 x_2 - 3 \ge 1$

因此$4 \le x_1 x_2 \le 6$

$(x_1, x_2) = (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,2)$

分析可知$(x_1, x_2, x_3) = (1,4,9)$或$(2,2,6)$