

八十六學年度高中數學競賽(嘉義區)——競試二試題  
(時間一小時)

1. 設  $x_0, x_1, \dots, x_{10}, x_{11}$  滿足以下關係式  
 $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 1, i = 0, 1, \dots, 9$ , 請用  $x_0$  和  $x_{11}$  來表示  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 。

2. 嘉義火車站有 3 個出口，每個出口每次僅能允許一個人出站，今有一個 15 人的旅行團到達嘉義站，請問有幾種出站的方式？

3. 設對所有的  $x, 0 \leq x \leq 1$ ,  $f(x)$  滿足  $f(x)f(1-x) = 1$ ,

計算 
$$\sum_{n=0}^{99} \frac{1}{1 + \left[ f\left(\frac{n}{99}\right) \right]^2}。$$

4. 設點  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心，有一直線過  $G$  分別交  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  於  $E, F$ , 試證明  $\overline{EG} \leq 2\overline{GF}$ 。

5. 令  $x \geq y \geq z \geq \frac{\pi}{12}$  且  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ , 求  $\cos x \sin y \cos z$  的最大值和最小值。

6. 設  $x_1, x_2, x_3$  為三個自然數且滿足  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$  和  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_1 x_2 x_3$ , 求所有可能的  $x_1, x_2, x_3$ 。