104 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）解答

一、【解】

總共的方法數為$(1+x+x^{-1})^7$展開後的常數項，由多項式定理知

此常數項為$\sum_{k=0}^{3}\binom{7}{2k}\binom{2k}{k}=393$

二、【解】

令 $f(x)=(1+x)^{2015}=\sum_{k=0}^{2015}\binom{2015}{k}x^k$

令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3i}}{2}\Rightarrow\omega^3=1,1+\omega+\omega^2=0$

$$f(1)+\omega^2 f(\omega)+\omega f(\omega^2)=2^{2015}+\omega^2(1+\omega)^{2015}+\omega(1+\omega^2)^{2015}$$

$$=2^{2015}-2$$

$$f(1)+\omega^2 f(\omega)+\omega f(\omega^2)$$

$$\sum_{k=0}^{2015}\binom{2015}{k}+\sum_{k=0}^{2015}\binom{2015}{k}\omega^{k+2}+\sum_{k=0}^{2015}\binom{2015}{k}\omega^{2k+1}$$

$$=\sum_{j=0}^{671}\binom{2015}{3j}(1+\omega+\omega^2)+\sum_{j=0}^{671}\binom{2015}{3j+1}(1+1+1)+\sum_{j=0}^{671}\binom{2015}{3j+2}(1+\omega+\omega^2)$$

$$=3\sum_{j=0}^{671}\binom{2015}{3j+1}$$

所以 $\sum_{k=0}^{671}\binom{2015}{1+3k}=\frac{2^{2015}-2}{3}$

三、【解】

令ω及ω^2為$x^2+x+1=0$的解

則$\omega^2+\omega+1=0$且$\omega^3=1$

又 $n=3k \Rightarrow \omega^{2(n+1)}+\omega^{n+1}+1=\omega^{2}+\omega+1=0$

$n=3k+1 \Rightarrow \omega^{2(n+1)}+\omega^{n+1}+1=\omega+\omega^{2}+1=0$

$n=3k+2 \Rightarrow \omega^{2(n+1)}+\omega^{n+1}+1=1+1+1=3 \neq 0$

得 $(x^{2}+x+1)\left|(x^{2(n+1)}+x^{n+1}+1) \Leftrightarrow n \equiv 0\right.$ 或 $1 \pmod 3$

令 $x=10$，即得

$111 \left| 10^{2(n+1)}+10^{n+1}+1 \Leftrightarrow n \equiv 0\right.$ 或 $1 \pmod 3$

所以 $37 \left| 10^{2(n+1)}+10^{n+1}+1 \Leftrightarrow n \equiv 0\right.$ 或 $1 \pmod 3$

因此，滿足條件的 n 個數有 $2014-\left[\dfrac{2015}{3}\right]=1343$ 個

四、【解】

設 ω_1、$\overline{\omega_1}$ 為 $x^3=1$ 的虛根，ω_2、$\overline{\omega_2}$ 為 $x^3=-1$ 的虛根，則

$\prod_{i=1}^{12}\left(x_i^4+x_i^2+1\right)$

$=\prod_{i=1}^{12}(x_i-\omega_1)(x_i-\overline{\omega_1})(x_i-\omega_2)(x_i-\overline{\omega_2})$

$=f(\omega_1)f(\overline{\omega_1})f(\omega_2)f(\overline{\omega_2})$

$=(3\omega_1^2+2)(3\overline{\omega}_1^2+2)(-3\omega_2^2+2)(-3\overline{\omega}_2^2+2)$

$=(-3\omega_1-1)(-3\overline{\omega}_1-1)(-3\omega_2+5)(-3\overline{\omega}_2+5)$

$=(9\omega_1\overline{\omega}_1+3(\omega_1+\overline{\omega}_1)+1)(9\omega_2\overline{\omega}_2-15(\omega_2+\overline{\omega}_2)+25)$

$=(9-3+1)(9-15+25)$

$=133$

五、【解】

$$\left(1-\frac{1}{S_1}\right)\left(1-\frac{1}{S_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{104}{2015}=\frac{8}{5\cdot 31}$$

$2\le S_1<S_2<\cdots<S_n$

因為 $S_i\ge i+1$, 所以 $1-\frac{1}{S_i}\ge 1-\frac{1}{i+1}$

所以$\left(1-\frac{1}{S_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{S_n}\right)\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

因此 $\frac{1}{n+1}\le\frac{8}{5\cdot 31}$,

即 $n\ge 19$

可找到一組

$S_1=2,S_2=3,\cdots,S_{14}=15,S_{15}=17,S_{16}=18,S_{17}=19,S_{18}=20,S_{19}=31,$

滿足

$$\left(1-\frac{1}{S_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{1}{15}\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{30}{31}=\frac{8}{155}$$

六、【解】

設H在$\overleftrightarrow{BC}$上，且$\overline{AH}\perp\overleftrightarrow{BC}$，

令ΔABP面積$=S_1$，ΔAPC面積$=S_2$，ΔABC面積$=S_3$

則$\frac{1}{\overline{\overline{PB}}}+\frac{1}{\overline{\overline{PC}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AH}}{S_1}+\frac{\overline{AH}}{S_2}\right)$

$$=\frac{\overline{AH}}{2}\left(\frac{S_3}{S_1S_2}\right)$$

$$=\frac{\overline{AH}}{2}\left(\frac{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin 45^\circ}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}^2\cdot\sin 15^\circ\cdot\sin 30^\circ}\right)$$

$= \overline{AH} \cdot 2\left(\sqrt{3}+1\right) \le \overline{AP} \cdot 2\left(\sqrt{3}+1\right) = 2\left(\sqrt{3}+1\right)$，

所以最大值為$2\left(\sqrt{3}+1\right)$。