104 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（二）　　編號：____

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共六題**填充題**，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、(3 分) 坐標平面上的一動點 P 在格子點(即 P 點的 x, y 坐標均為整數)間移動，其移動規則為：若 P 點目前位於格子點 (m,n)，則接下來可選擇移動至 $(m+1,n+1), (m+1,n), (m+1,n-1)$ 三點中的其中一點。若 P 點自原點 $(0,0)$ 出發，依照規則移動到 $(7,0)$ 可有多少種不同的走法?

二、（3 分）設 $C_m^n=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$，其中的 $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$。求 $\sum\limits_{k=0}^{671} C_{1+3k}^{2015}$ 的值。

三、(3 分) 有多少個不大於 2015 的正整數 n，可以使得 $1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{個}}1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{個}}1$ 這個數成為37的倍數？

四、(4 分) 令 $x_1, x_2, \cdots, x_{12}$ 為方程式 $x^{12}+3x^{11}+1=0$ 的12個根，求 $\left(x_1^4+x_1^2+1\right)\left(x_2^4+x_2^2+1\right)\left(x_3^4+x_3^2+1\right)\cdots\left(x_{12}^4+x_{12}^2+1\right)$ 的值。

五、(4 分) 設 $S_1, \cdots, S_n$ 為 n 個相異正整數，且滿足 $\left(1-\dfrac{1}{S_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{S_2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{S_n}\right)=\dfrac{104}{2015}$，求最小正整數 n 的值。

六、(4 分) 平面上已知 $\angle A$ 及其內部一定點 P，過 P 作一直線交 $\angle A$ 兩邊於 B, C 兩點，若 $\overline{PA}=1$, $\angle PAC=15°$, $\angle PAB=30°$，求 $\dfrac{1}{\overline{PB}}+\dfrac{1}{\overline{PC}}$ 的最大值。