104 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一）解答

一、【解】

令 X ＝達成 4 片成工所需製作的總片數。$X \in \mathbb{Z}$ 且 $X \geq 4$

$$P(X=x)=C_3^{x-1}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$$

(1) 成本=10000+2500x

收入=$6000\cdot 4$

$10000+2500x > 6000\cdot 4$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{14000}{2500}$

$\Leftrightarrow x \geq 6$

P（賠錢）$=P(X\geq 6)=1-\left[P(X=4)+P(X=5)\right]$

$$=1-\left[C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_3^4\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$$

(2) 因為 $P\left(X=4\right)=\dfrac{1}{16},P(X=5)=\dfrac{2}{16},P(X=6)=\dfrac{10}{64},P(X=7)=\dfrac{20}{128}$

$P(X\leq 7)=\dfrac{1}{2}$，所以，$P(X\leq n)>\dfrac{1}{2}$ 若且唯若 $n\geq 8,$

因此 $P(10000+2500X\leq 4y)=P\left(X\leq\dfrac{4y-10000}{2500}\right)>\dfrac{1}{2}$ 若且唯若

$\dfrac{4y-10000}{2500}\geq 8$，即 $y\geq 7500$。

二、【解】

當 $a=b=c=d=\frac{1}{4}$ **時**，$2\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$，即 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\pm\frac{1}{4}$

Case 1、 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

將 $a=x,b=\frac{1}{2}-x,c=\frac{1}{4},d=\frac{1}{4}$ 代入，得

$$f(x)f\left(\frac{1}{2}-x\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2=x\left(\frac{1}{2}-x\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

即 $f(x)f\left(\frac{1}{2}-x\right)=x\left(\frac{1}{2}-x\right)\cdots①$

將 $a=x,b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{2}-x,d=\frac{1}{4}$ 代入，得

$$f(x)\cdot\frac{1}{4}+f\left(\frac{1}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

即 $f(x)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{1}{2}\cdots②$

由①、②可知，$[f(x)]^2-\frac{1}{2}f(x)+x\left(\frac{1}{2}-x\right)=0$

解得 $f(x)$ 的值可能為 x，也可能為 $\frac{1}{2}-x$

若存在 $a,b,$ 使得 $f(a)=a,\ f(b)=\frac{1}{2}-b$

則由②可知 $f\left(\frac{1}{2}-a\right)=\frac{1}{2}-a$， $f\left(\frac{1}{2}-b\right)=b$

所以 $f(a)f(b)+f\left(\frac{1}{2}-a\right)f\left(\frac{1}{2}-b\right)=ab+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)$

可得 $a\left(\frac{1}{2}-b\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)b=ab+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(a+b)+ab$

即 $a+b-4ab-\frac{1}{4}=0, \left(a-\frac{1}{4}\right)(1-4b)=0$

所以 $a=\frac{1}{4}$ 或 $b=\frac{1}{4}$。

因此 $f(x)=x$ 或 $f(x)=\frac{1}{2}-x$。此兩函數的確滿足條件

Case 2、 $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

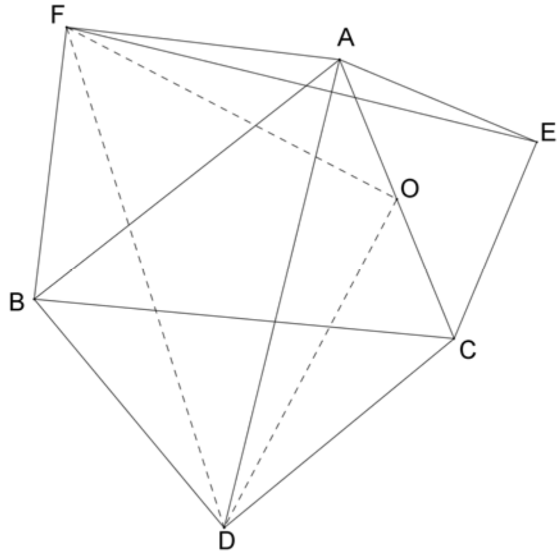
令 $g(x)=-f(x)$, 則 $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$，且

$g(a)g(b)+g(c)g(d)=ab+cd$

由 Case 1, $g(x)=x$ 或 $\frac{1}{2}-x$，因此 $f(x)=-x$ 或 $x-\frac{1}{2}$ 亦為其解。

由 Case 1、2 可知，$f(x)=x, f(x)=\frac{1}{2}-x, f(x)=-x, f(x)=x-\frac{1}{2}$

三、【解一】



因為$\Delta ABF, \Delta BCD$為等腰直角三角形，令$R(D,90^\circ)$代表以D為中心逆時針90°的旋轉，則

$B=R(D,90^\circ)(C), A=R(F,90^\circ)(B)$

因此$R(F,90^\circ)\circ R(D,90^\circ)(C)=A$。

作$\Delta OFD, \angle OFD=\angle ODF=45^\circ$，

令$\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{FD})$代表對線$\overleftrightarrow{FD}$的鏡射

則$R(D,90^\circ)=\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{FD})\circ\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{OD})$

$R(F,90^\circ)=\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{OF})\circ\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{FD})$

所以$R(F,90^\circ)\circ R(D,90^\circ)=\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{OF})\circ\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{FD})\circ\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{FD})\circ\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{OD})$

$=\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{OF})\circ\mathrm{Re}(\overleftrightarrow{OD})=R(O,180^\circ)$

即$A=R(O,180^\circ)(C)$

$\Delta OAD=R(O,90^\circ)(\Delta OEF)$，所以$O$為$\overline{CA}$中點

因此$AD=EF, AD\perp EF$

【解二】

定一直角坐標系，使得$B(0,0), C(1,0), A(a,b)$

則$D\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right), E\left(\frac{1+a+b}{2},\frac{1-a+b}{2}\right), F\left(\frac{a-b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$

所以$\overrightarrow{FE}=\left(\frac{1+2b}{2},\frac{1-2a}{2}\right), \overrightarrow{AD}=\left(\frac{1-2a}{2},\frac{-1-2b}{2}\right)$

因此$\overline{FE}=\overline{AD}, \overline{FE}\perp\overline{AD}$。

四、【解】

設$\left[\sqrt{n}\right]=p,\left[\sqrt[4]{n}\right]=q$，則$\begin{cases} p^2\le n<(p+1)^2 \\ q^4\le n<(q+1)^4 \\ p+q=t^2 \end{cases}$

此即$\begin{cases} (t^2-q)^2\le n<(t^2+1-q)^2 \\ q^4\le n<(q+1)^4 \end{cases}$

設q_0為$(q+1)^4=(t^2-q)^2$的解，則q_0+1為$q^4=(t^2+1-q)^2$的解

經計算可得$q_0=\dfrac{-3+\sqrt{4t^2+5}}{2}$

由於$t>2$，因此，$4t^2<4t^2+5<4t^2+4t+1$

即$2t<\sqrt{4t^2+5}<2t+1$

所以$\dfrac{-3+2t}{2}<q_0<\dfrac{-3+2t+1}{2}$，即$t-\dfrac{3}{2}<q_0<t-1$

由此可知$t-1$為唯一介於q_0及q_0+1之間的整數

當$q=t-1$時，$(q+1)^4=t^4>(t^2+2-t)^2=(t^2+1-q)^2,\quad (t>2)$

$$且\ (t^2-q)^2=(t^2-t+1)^2>(t^2-2t+1)^2=q^4$$

所以，滿足方程式的n必滿足

$$(t^2-t+1)^2\le n<(t^2+1-t+1)^2=(t^2-t+2)^2$$

這樣的整數共有

$$(t^2-t+2)^2-(t^2-t+1)^2=2t^2-2t+3\text{個。}$$

五、【解】

令 $x_i = a^{i(n-i)+1}b^{(i-1)(n+1-i)+1} - a^{(i-1)(n+1-i)+1}b^{i(n-i)+1}$

則 $x_{n+1\text{-}i} = a^{(n+1-i)(i-1)+1}b^{(n-i)i+1} - a^{(n-i)i+1}b^{(n+1-i)(i-1)+1} = -x_i$

欲證不等式，左邊減右邊得

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}x_i = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x_i$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{x_0+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{0}\right]x_1+\left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}\right]x_2+\cdots+\left[\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}-\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right]x_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$$

$$\geq\frac{M_n}{n!}\left\{1+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{0}\right]+\left[\binom{n}{2}-\binom{n}{1}\right]+\cdots+\left[\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}-\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\right]\right\}$$

$$=\frac{M_n}{n!}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}>0$$

其中的 $M_n = \min\left\{x_0, x_1, \cdots, x_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$，而由於 $a > b > 0,$ 所以當 $0 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$

時，$x_i = (ab)^{i(n-i)+1}\left\{b^{2i-n-1} - a^{2i-n-1}\right\} > 0$，因此 $M_n > 0$。