

# 104 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一） 編號：\_\_\_\_\_

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
  2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。
- 

一、(9分) 晶圓之製作成本有兩部分：開模之固定成本及每片之材料成本。一晶圓廠接到某特殊規格之晶圓訂單，已知其製程中每片的成功率為50%，而開模之固定成本為\$10,000元，每片之材料成本為\$2,500元。假設訂單為4片（成功生產4片後即停止，其模子也銷毀），

- (1) 若每片售價\$6,000元，則這筆生意賠錢的機率為多少？
- (2) 若希望不賠錢(即賺錢或損益兩平)的機率超過50%，則每片售價至少應多少錢？

二、(10分) 求所有定義在實數的實數值函數  $f$ ，滿足：若  $a, b, c, d$  為任意數，且  $a + b + c + d = 1$ ，則  $f(a)f(b) + f(c)f(d) = ab + cd$ 。(須說明理由)

三、(10分) 對任意實數  $x$ ， $[x]$  表不大於  $x$  的最大整數。設  $t$  為大於2的整數，求證：滿足方程式  $[\sqrt{n}] + [\sqrt[4]{n}] = t^2$  的整數  $n$  共有  $2t^2 - 2t + 3$  個。

四、(10分) 在  $\triangle ABC$  外側作等腰直角三角形  $\triangle BCD, \triangle CAE, \triangle ABF$ ，其中  $\angle D, \angle E, \angle F$  為直角，證明： $\overline{EF} = \overline{AD}$  且  $\overline{EF} \perp \overline{AD}$ 。

五、(10分) 對任意非負整數  $n$  及滿足  $a > b$  的正實數  $a, b$ ，證明：

$$\sum_{i=0}^n \frac{a^{i(n-i)+1} b^{(i-1)(n+1-i)+1}}{i!(n-i)!} > \sum_{i=0}^n \frac{a^{(i-1)(n+1-i)+1} b^{i(n-i)+1}}{i!(n-i)!}$$

其中的  $0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ 。