

104 學年度高級中學數學學科能力競賽

中投區複賽試題（一） 編號：_____

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題計算證明題，滿分為四十九分。
 2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。
-

一、(9分) 晶圓之製作成本有兩部分：開模之固定成本及每片之材料成本。一晶圓廠接到某特殊規格之晶圓訂單，已知其製程中每片的成功率為50%，而開模之固定成本為\$10,000元，每片之材料成本為\$2,500元。假設訂單為4片（成功生產4片後即停止，其模子也銷毀），

- (1) 若每片售價\$6,000元，則這筆生意賠錢的機率為多少？
- (2) 若希望不賠錢(即賺錢或損益兩平)的機率超過50%，則每片售價至少應多少錢？

二、(10分) 求所有定義在實數的實數值函數 f ，滿足：若 a, b, c, d 為任意數，且 $a + b + c + d = 1$ ，則 $f(a)f(b) + f(c)f(d) = ab + cd$ 。(須說明理由)

三、(10分) 對任意實數 x ， $[x]$ 表不大於 x 的最大整數。設 t 為大於2的整數，求證：滿足方程式 $[\sqrt{n}] + [\sqrt[4]{n}] = t^2$ 的整數 n 共有 $2t^2 - 2t + 3$ 個。

四、(10分) 在 $\triangle ABC$ 外側作等腰直角三角形 $\triangle BCD, \triangle CAE, \triangle ABF$ ，其中 $\angle D, \angle E, \angle F$ 為直角，證明： $\overline{EF} = \overline{AD}$ 且 $\overline{EF} \perp \overline{AD}$ 。

五、(10分) 對任意非負整數 n 及滿足 $a > b$ 的正實數 a, b ，證明：

$$\sum_{i=0}^n \frac{a^{i(n-i)+1} b^{(i-1)(n+1-i)+1}}{i!(n-i)!} > \sum_{i=0}^n \frac{a^{(i-1)(n+1-i)+1} b^{i(n-i)+1}}{i!(n-i)!}$$

其中的 $0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ 。