104 學年度臺北市 (麗山高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題參考解答

注意事項：

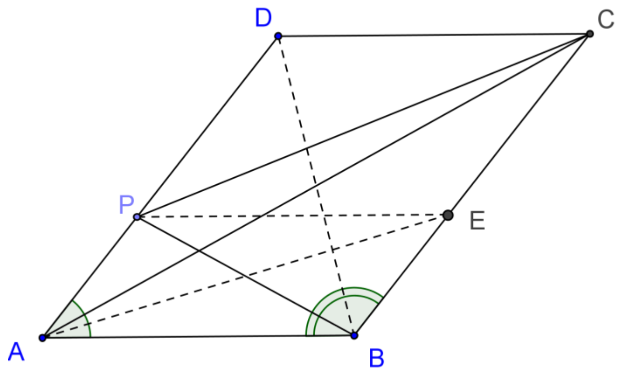
1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 $ABCD$ 為平行四邊形，其中 $\angle A < \angle B$。

試證：若 P 為 $\overline{AD}$ 上的任一點，則

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD} \le \overline{AB}+\overline{AC}$ + ... 。 (12 分)

【證明】： 示意圖如下圖實線所示：



(一) 當 $P=A$ 時，$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{AA}+\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$ 。

當 $P=D$ 時，

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}+\overline{DD}=\overline{AD}$ ...

$<\overline{AD}+\overline{AC}+\overline{AB}$

$(\because \angle B > \angle A, \angle B + \angle A = 180^\circ,\ \therefore \angle B > 90^\circ, \angle A < 90^\circ,$

而知 $\overline{AC}^2 > \overline{AB}^2+\overline{BC}^2, \overline{BD}^2 < \overline{AB}^2+\overline{AD}^2 \Rightarrow \overline{AC} > \overline{BD})$

(二) 當 P 為 $\overline{AD}$ 邊非端點 A, D 時，過 P 作 $\overline{PE} \parallel \overline{AB}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 E，則 $ABEP$ 為平行四邊形，故 $\overline{PE} = \overline{AB}$。

欲證

$$
\begin{aligned}
& \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} < \overline{AD} + \overline{AC} + \overline{AB} \\
\Leftrightarrow & \left(\overline{PA} + \overline{PD}\right) + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AD} + \overline{AC} + \overline{AB} \\
\Leftrightarrow & \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AC} + \overline{AB}.
\end{aligned}
$$

連 $\overline{AE}$, 在平行四邊形 $ABEP$ 中，二內角 $\angle A < \angle B$, 故亦知 $\overline{PB} < \overline{AE}$。

(三) 在四邊形 $AECP$ 中 $\overline{AC}$ 與 $\overline{PE}$ 為相交的對角線，故得

$$\overline{AC} + \overline{PE} > \overline{PC} + \overline{AE} > \overline{PC} + \overline{PB}。$$

即得 $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AC} + \overline{AB}$。

問題二： 設 ΔABC 為邊長 1 的正三角形，$\overline{BC}$ 上有 n 等分點，沿點 B 到點 C 的方向，依次為 P_1，P_2，…，P_{n-1}，其中 $n \geq 2$；並令向量內積的和 S_n 為

$$S_n = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AP_2} \cdot \overrightarrow{AP_3} + \cdots + \overrightarrow{AP_{n-1}} \cdot \overrightarrow{AC}$$ 。

試求 S_n 的值 (以 n 表示)。 (12 分)

【解答】： 為了方便計算，令 $P_0 = B, P_n = C$ ，根據向量分點公式，得

$$\overrightarrow{AP_k} = \frac{(n-k)\overrightarrow{AP_0} + k\overrightarrow{AP_n}}{n}$$ 。

因為正 ΔABC 的邊長為 1，所以

$$\overrightarrow{AP_0} \cdot \overrightarrow{AP_0} = \overrightarrow{AP_n} \cdot \overrightarrow{AP_n} = 1, \overrightarrow{AP_0} \cdot \overrightarrow{AP_n} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$ 。

此時，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{AP_{k-1}} \cdot \overrightarrow{AP_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)\overrightarrow{AP_0} + (k-1)\overrightarrow{AP_n}}{n} \cdot \frac{(n-k)\overrightarrow{AP_0} + k\overrightarrow{AP_n}}{n}$$ ；

即

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k) + \frac{1}{2}(n-k+1)k + \frac{1}{2}(k-1)(n-k) + (k-1)k}{n^2}$$ 。

整理可得

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - (n+1)k + (n^2 + \frac{n}{2})}{n^2}$$ 。

代入平方和公式，得

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{n(n+1)^2}{2n^2} + \frac{2n+1}{2}$$ ；

即

$$S_n = \frac{5n^2 - 2}{6n}$$ 。

問題三： 試找出所有可能的正整數 p 及數列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_m$ 同時滿足以下條件：

(1) $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_m\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$，

(2) $\sum_{k=0}^{m}a_kp^k=(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)$。 (12 分)

【解答】： 當 $p=1$ 時，$a_0=a_1=\cdots=a_m=0$，都不會滿足(2)式。以下考慮 $p\ge 2$ 的情況。注意：當數列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_m$ 滿足題設條件時，數列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_m,0,0,\cdots,0$ 也會滿足題設條件，故僅須考慮 $a_m\neq 0$ 的情況。

(i) 當 $m=0$ 時，$a_0=1+a_0$，不可能。

(ii) 當 $m=1$ 時，$a_0+a_1p=(1+a_0)(1+a_1)$，得知：$a_1(p-1-a_0)=1$。故 $a_1=p-1-a_0=1$，即 $a_0=p-2,a_1=1$。

(iii) 以下證明：當 $m\ge 2$ 時，數列都不存在。假設

$$\sum_{k=0}^{m}a_kp^k=(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)\text{。}$$

利用 $(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)$

$$=(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-1})+a_m(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-1})$$

$$=(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-2})+a_{m-1}(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-2})$$

$$+a_m(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-1})=\cdots$$

$$=(1+a_0)+a_1(1+a_0)+a_2(1+a_0)(1+a_1)+\cdots+a_m(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{m-1})$$

$$=(1+a_0)+\sum_{k=1}^{m}a_k\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)\text{。}$$

可得：$\sum_{k=0}^{m}a_kp^k=(1+a_0)+\sum_{k=1}^{m}a_k\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)$。移項整理得：$\sum_{k=1}^{m}a_k\left(p^k-\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)\right)=1$。

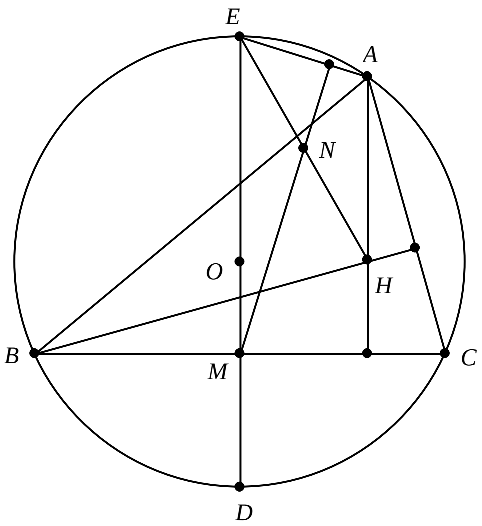
(1)若 $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=p-1$，則 $\sum_{k=1}^{m}a_k\left(p^k-\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)\right)=0$，不合。

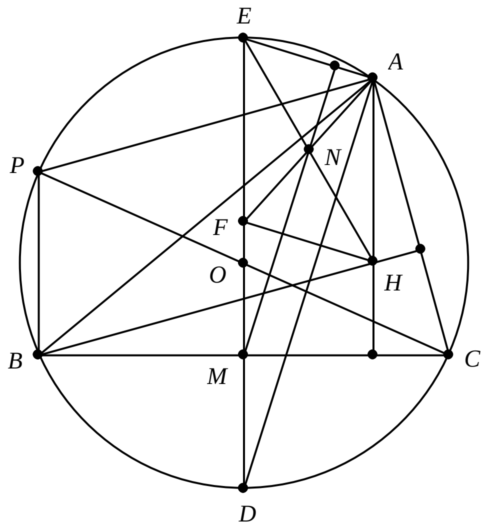
(2)若 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}$ 中有一項不等於 $p-1$，則

$$\sum_{k=1}^{m}a_k\left(p^k-\prod_{i=0}^{k-1}(1+a_i)\right)\ge a_m\left(p^m-\prod_{i=0}^{m-1}(1+a_i)\right)>a_m\ge 1\text{，不合。}$$

綜合以上討論，所求為 $p\ge 2$，而數列為：$\langle p-2,1\rangle,\langle p-2,1,0\rangle,\cdots,\langle p-2,1,0,0,\cdots,0\rangle$。

問題四： 設$\triangle ABC$是銳角三角形且$\overline{AB} \neq \overline{AC}$，其外心為$O$、垂心為$H$。設點$D$是$\angle BAC$的分角線與外接圓的另一交點，$\overline{DE}$是$\triangle ABC$的外接圓直徑，$M$是$\overline{BC}$的中點，$N$是$\overline{EH}$的中點。試證：直線$MN$與直線$AE$垂直。　(13 分)





【證明】： 設直線CO與外接圓的另一交點為P。

因為$\overline{CP}$是$\triangle ABC$外接圓的一直徑，所以，$\overline{PB} \perp \overline{BC}$、$\overline{PA} \perp \overline{CA}$。因為直線$PB$、直線$AH$都與直線$BC$垂直，所以，$\overline{PB}$與$\overline{AH}$平行。同理，因為直線$PA$、直線$BH$都與直線$AC$垂直，所以，$\overline{PA}$與$\overline{BH}$平行。於是，▱$PAHB$為平行四邊形，$\overline{AH} = \overline{PB}$。其次，在$\triangle BCP$中，因為點$O$與點$M$分別是$\overline{PC}$與$\overline{BC}$的中點，所以，$\overline{PB} = 2\overline{OM}$。於是，可得

$$\overline{AH} = \overline{PB} = 2\overline{OM} \text{ 。}$$

在直線DE上作點F使得點M成為$\overline{DF}$的中點。因為$\angle A$是銳角，所以，邊$\overline{BC}$的中點M必在半徑$\overline{OD}$上。於是，可得

$$\overline{DE} = 2\overline{DO} = 2(\overline{DM} + \overline{OM}) = \overline{DM} + \overline{FM} + 2\overline{OM} = \overline{DF} + 2\overline{OM} \text{ ，}$$

所以，可得$\overline{EF} = \overline{DE} - \overline{DF} = 2\overline{OM} = \overline{AH}$。因為直線$AH$與直線$EF$都與直線$BC$垂直，所以，$\overline{EF}$與$\overline{AH}$平行。由此可知：▱$AEFH$為平行四邊形，其對角線$\overline{AF}$與$\overline{EH}$互相平分於$\overline{EH}$的中點$N$。

在$\triangle ADF$中，因為點M與點N分別是$\overline{DF}$與$\overline{AF}$的中點，所以，直線MN與直線AD平行。因為$\overline{DE}$是$\triangle ABC$外接圓的一直徑，所以，直線AD與直線AE垂直。於是，直線MN與直線AE垂直。