

**104 學年度臺北市（麗山高中）**  
**普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽**  
**數學科筆試（一）試題**

編號：\_\_\_\_\_（學生自填）

**注意事項：**

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

**問題一：**設  $ABCD$  為平行四邊形，其中  $\angle A < \angle B$ 。

試證：若  $P$  為  $\overline{AD}$  上的任一點，則

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = \overline{AB} + \overline{AC}。 \quad (12 \text{ 分})$$

**問題二：**設  $\triangle ABC$  為邊長 1 的正三角形， $\overline{BC}$  上有  $n$  等分點，沿點  $B$  到點  $C$  的方

向，依次為  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $\dots$ 、 $P_{n-1}$ ，其中  $n \geq 2$ ；並令向量內積的和  $S_n$  為

$$S_n = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AP_2} \cdot \overrightarrow{AP_3} + \dots + \overrightarrow{AP_{n-1}} \cdot \overrightarrow{AC}。$$

試求  $S_n$  的值（以  $n$  表示）。 (12 分)

《背面尚有試題》

**問題三：** 試找出所有可能的正整數  $p$  及數列  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  同時滿足以下條件：

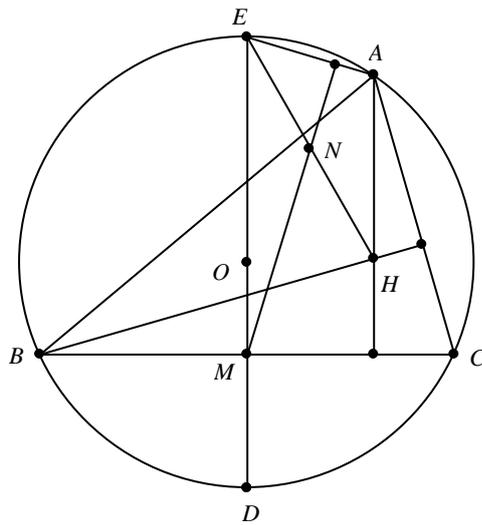
(1)  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  ,

(2)  $\sum_{k=0}^m a_k p^k = (1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_m)$  。 (12 分)

**問題四：** 設  $\triangle ABC$  是銳角三角形且  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ ，其外心為  $O$ 、垂心為  $H$ 。設點  $D$  是

$\angle BAC$  的分角線與外接圓的另一交點， $\overline{DE}$  是  $\triangle ABC$  的外接圓直徑， $M$  是  $\overline{BC}$

的中點， $N$  是  $\overline{EH}$  的中點。試證：直線  $MN$  與直線  $AE$  垂直。



(13 分)

《試題結束》