

104 學年度臺北市（麗山高中）
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科口試試題參考解答

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本口試卷共 2 大題，參賽者可先在空白紙上作答，思考及作答時間 15 分鐘；口試時請攜帶作答紙應試，答辯時間 15 分鐘。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，不必太專注於計算的過程。

【試題一】

形如 $\frac{q}{p}$ (其中 $8 \leq p \leq 99$) 的最簡分數中，哪一個最簡分數最接近 $\frac{3}{7}$ ？

【解答】

$$\text{因為 } \left| \frac{3}{7} - \frac{q}{p} \right| = \frac{|3p-7q|}{7p},$$

所以依題意，欲找的 p 值要越大且小或等於 99 使得 $3p-7q = \pm 1$ 。

又因為 $p < 100 \Rightarrow 3p < 300$ ，且 $3p$ 與 7 的倍數要相差 1，

因此，從小於 300 且接近 7 的倍數著手。

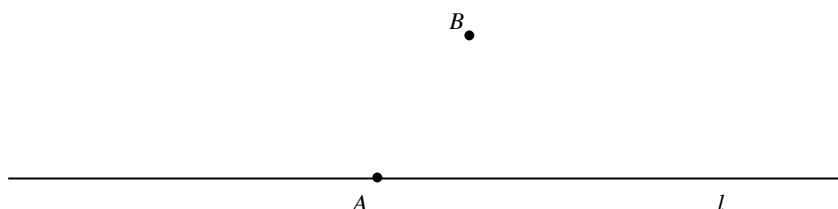
我們發現 $287 = 7 \times 41$ 與 $288 = 3 \times 96$ 相差 1，故 $\frac{41}{96}$ 與 $\frac{3}{7}$ 相差 $\frac{1}{7 \times 96}$ 是滿足題意中最接

近 $\frac{3}{7}$ 的最簡分數。

【試題二】

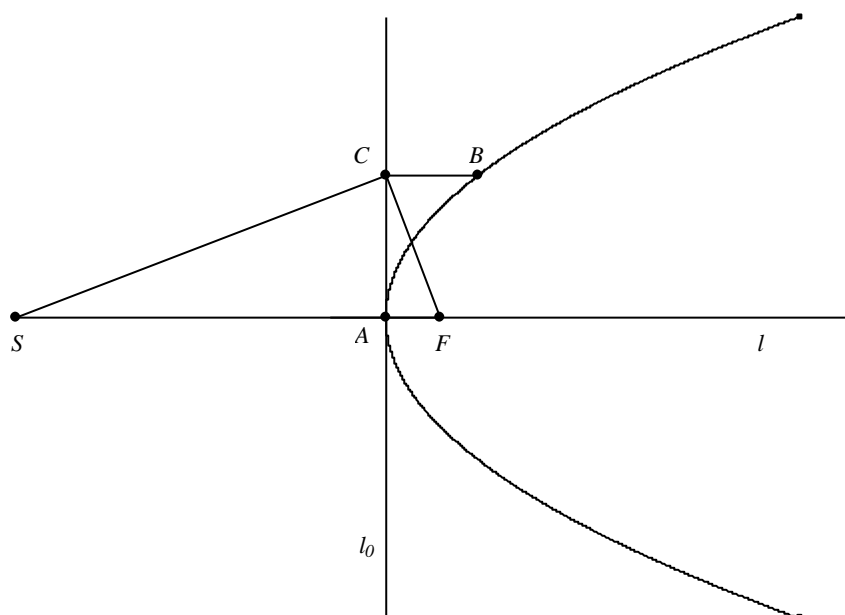
給定一直線 l 及其上一點 A 。當點 B 不在直線 l 上且直線 AB 與直線 l 不垂直時，直線 l 上恰有一點 F 使得：以 A 為頂點、 F 為焦點的拋物線通過點 B 。

試說明由點 A 、點 B 與直線 l 如何作出焦點 F 。



【證明】

設過點 A 而與直線 l 垂直的直線為 l_0 、且點 B 至直線 l_0 的垂足為點 C 。在直線 l 上作出點 S 使得：點 S 與點 B 在直線 l_0 的異側，且 $\overline{AS} = 4\overline{BC}$ 。過點 C 作直線 CS 的垂直線，設此垂直線與直線 l 交於點 F ，則以點 A 為頂點、點 F 為焦點的拋物線必通過點 B 。其理由如下：



因為 $\triangle CSF$ 是直角三角形且 $\angle SCF$ 是直角，所以，依相似三角形的性質，可知 $\overline{AC}^2 = \overline{AS} \times \overline{AF} = 4\overline{BC} \times \overline{AF}$ 。因為

$$\overline{BF} = \sqrt{\overline{AC}^2 + |\overline{AF} - \overline{BC}|^2} = \sqrt{4\overline{BC} \times \overline{AF} + (\overline{AF} - \overline{BC})^2} = \overline{AF} + \overline{BC}。$$

另一方面，設以點 A 為頂點、點 F 為焦點所作拋物線的準線為直線 l_1 ，則點 A 至準線 l_1 的距離為 \overline{AF} 。因此，點 B 至準線 l_1 的距離等於 $\overline{AF} + \overline{BC}$ 。