# 104 學年度台灣省第六區第六區(台南區)

# 高級中學數理與資訊學科能力競賽複試　試題 2

# 參考解答

注意事項:

(1)　時間分配:2 小時

(2)　(2)本試卷共 4 題,滿 49 分,第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分,

(3)　將計算 證明過程喔敘寫在答案卷上.不可使用電算器.

(4)　試題與答案卷一同繳回.

1. 若 $7x-\frac{1}{y}=16$，$xy+\frac{1}{xy}=30$，試求 $2xy-20x+9$ 之值。

【參考解答】:

由 $xy+\frac{1}{xy}=30$ 知 $xy>0$

因為 $7x-\frac{1}{y}=16$ 且

$$\left(7x-\frac{1}{y}\right)\left(y-\frac{7}{x}\right)=7xy-49-1+\frac{7}{xy}=7\left(xy+\frac{1}{xy}\right)-50=160$$

所以

$$y-\frac{7}{x}=10$$

$$\Rightarrow\quad xy-10x=7$$

故 $2xy-20x+9=23$

2. 有一個十位數 A，其數字由左至右分別為 $a_1$、$a_2$、…、$a_{10}$，其中 $a_1=1$，而 $a_2$、$a_3$、…、$a_{10}$ 皆為 **0** 或 **1**，且滿足 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$，試求滿足這樣條件的 A 之個數。

**【參考解答】** 將 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ 之和分為 1~5 五種情形分別討論個數即可:

（1）$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=1$

$\Rightarrow a_3,a_5,a_7,a_9$ 中皆為 0；而 $a_2,a_4,a_6,a_8,a_{10}$ 中有一個為 1，四個為 0

$\therefore$ 有 $C_4^4\times C_1^5\times C_4^4=1\times5\times1=5$ 種情形

（2）$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=2$

$\Rightarrow a_3,a_5,a_7,a_9$ 中有一個為 1，三個為 0；而 $a_2,a_4,a_6,a_8,a_{10}$ 中有二個為 1，三個為 0

$\therefore$ 有 $C_1^4\times C_3^3\times C_2^5\times C_3^3=4\times1\times10\times1=40$ 種情形

（3）$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=3$

$\Rightarrow a_3,a_5,a_7,a_9$ 中有二個為 1，二個為 0；而 $a_2,a_4,a_6,a_8,a_{10}$ 中有三個為 1，二個為 0

$\therefore$ 有 $C_2^4\times C_2^2\times C_3^5\times C_2^2=6\times1\times10\times1=60$ 種情形

（4）$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=4$

$\Rightarrow a_3,a_5,a_7,a_9$ 中有三個為 1，一個為 0；而 $a_2,a_4,a_6,a_8,a_{10}$ 中有四個為 1，二個為 0

$\therefore$ 有 $C_3^4\times C_1^1\times C_4^5\times C_1^1=4\times1\times5\times1=20$ 種情形

（5）$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=5$

$\Rightarrow a_3,a_5,a_7,a_9$ 中皆為 1；而 $a_2,a_4,a_6,a_8,a_{10}$ 中亦皆為 1

$\therefore$ 有 $C_4^4\times C_5^5=1\times1=1$ 種情形

由（1）（2）（3）（4）（5）知，A 之個數共有 5+40+60+20+1=126 個

3. 若$a,b$是方程式$x^4-3x^3+x^2-2x+4=0$的兩個根，則$ab$會是方程式$x^6-x^5+c_1x^4+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5=0$的一個根，試求$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5$之值。

解：

設方程式$x^4-3x^3+x^2-2x+4=0$的四個根為$a,b,c,d$，則

$a+b+c+d=3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$ab+ac+ad+bd+bc+cd=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$abc+abd+acd+bcd=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$abcd=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

令$x=ab$，由(1)和(4)可得

$$c+d=3-a-b,\ \ cd=\frac{4}{x}$$

代入(2)和(3)可得

$$x+3(a+b)-(a+b)^2+\frac{4}{x}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$3x-(a+b)x+\frac{4(a+b)}{x}=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

從(6)可得

$$(a+b)\left(\frac{4}{x}-x\right)=2-3x\Longrightarrow a+b=\frac{2x-3x^2}{4-x^2}$$

代入(5)可得

$$\mathrm{x}+\frac{6x-9x^2}{4-x^2}-\frac{(2x-3x^2)^2}{(4-x^2)^2}+\frac{4}{x}=1$$

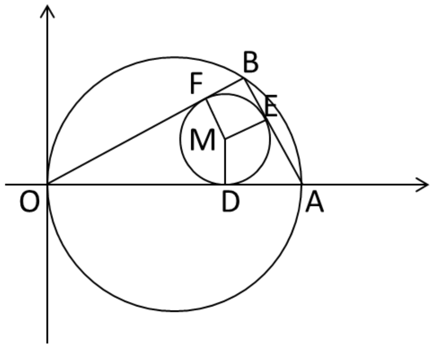
整理後可得

$x^6-x^5+2x^4-32x^3+8x^2-16x+64=0$

$\therefore c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=26$

4. 已知$O(0,0)$和$A(1,0)$為直角坐標平面上的兩點，有一點$B$落在以$\overline{OA}$為直徑的圓上且點$B$位於第一象限，試求$\Delta OAB$的內切圓圓心的軌跡方程式。

解：




設$\Delta OAB$的內切圓圓心座標為$M(x,y)$，過$M$點作三邊$OA, AB, OB$的垂線，垂足分別為$D, E, F$，因為$\Delta OAB$為直角三角形，所以$|EB| = |FB| = |MD|$。另外，

$|OB| = |OF| + |FB| = |OD| + |MD| = x + y$

$|AB| = |AE| + |EB| = |AD| + |MD| = 1 - x + y$

根據畢氏定理知$|OB|^2 + |AB|^2 = |OA|^2$

所以$(x+y)^2 + (1-x+y)^2 = 1$

化簡得$x^2 + y^2 - x + y = 0$

**5.** **設** $a,b$ **為整數，如果多項式** $x^2-x-1$ **為** $ax^{17}+bx^{16}+1$ **的因式，試求** $a$ **之值。**

**【參考解答】令** $\alpha,\beta$ **為方程式** $x^2-x-1=0$ **之二根，所以**

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\quad ,$$

**由題意知，** $x^2-x-1$ **為** $ax^{17}+bx^{16}+1$ **的因式，所以**

$$a\alpha^{17}+b\alpha^{16}+1=0,\quad a\beta^{17}+b\beta^{16}+1=0$$

**將第一式乘以** $\beta^{16}$ **且第二式乘以** $\alpha^{16}$ **後，因為** $\alpha+\beta=1,\alpha\beta=-1$ **，得**

$a\alpha+b=-\beta^{16},a\beta+b=-\alpha^{16}$ **，解此二方程式，得**

$$a=\frac{\alpha^{16}-\beta^{16}}{\alpha-\beta}=(\alpha^8+\beta^8)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)$$ **，又**

$\alpha+\beta=1,\alpha\beta=-1$ **，所以**

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3,\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=7,$$

$$\alpha^8+\beta^8=(\alpha^4+\beta^4)^2-2\alpha^4\beta^4=47$$

**因此** $a=(\alpha^8+\beta^8)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)=47\cdot7\cdot3\cdot1=987$ 。

**【註】** $a=\dfrac{\alpha^{16}-\beta^{16}}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{16}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{16}\right]$ **正好是費伯納希數列第 17 項，這是比內公式(Binet's formula)，**

$F_1=F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\forall\, n=3,4,5,\ldots$ 。

6. 若函數 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 滿足 $f(xf(y))=f(xy)+4x$，其中 $x,y$ 為正實數，試求 $\sum_{n=2000}^{2015} f(n)$ 之值。

【參考解答】:

因函數 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 滿足

$$f(xf(y))=f(xy)+4x \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

7. 用 $f(x)$ 代替(1)中的 $x$ 可得

$$f(f(x)f(y))=f(f(x)y)+4f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

8. 交換(1)中 $x$ 和 $y$ 可得

$$f(yf(x))=f(yx)+4y \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

9. 由(2)和(3)可得

$$f(f(x)f(y))=f(yx)+4y+4f(x) \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

10. 交換(4)中 $x$ 和 $y$ 可得

$$f(f(y)f(x))=f(xy)+4x+4f(y) \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

11. 故由(4)和(5)可得

$$f(yx)+4y+4f(x)=f(xy)+4x+4f(y)$$

12. 化簡可得

$$f(x)-x=f(y)-y$$

13. 令函數 $F(x)=f(x)-x$

則函數 $F(x)$ 是一常數，不妨設 $F(x)=c$，其中 $c$ 是某定數

14. 所以 $f(x)=x+c$

由此可得

$$f(xf(y))=xf(y)+c=x(y+c)+c=xy+cx+c \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

15. 另一方面，由(1)亦可得

$$f(xf(y))=f(xy)+4x=xy+c+4x \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

16. 所以由(6)和(7)可得 $c=4$

故滿足條件的函數只有 $f(x)=x+4$

所以 $\sum_{n=2000}^{2015} f(n)=\sum_{n=2000}^{2015}(n+4)=32184$