

104 學年度台灣省第六區(台南區)

高級中學數理與資訊學科能力競賽複試 試題 2

注意事項：

- (a) 時間分配：1 小時。
- (b) 本試卷共 6 題，滿分 21 分，第一題 3 分，第二題 3 分，第三題 3 分，第四題 4 分，第五題 4 分，第六題 4 分。
- (c) 將計算證明過程詳敘寫在答案卷上。不可使用電算器。
- (d) 試題與答案卷需一同繳回。

1. 若 $7x - \frac{1}{y} = 16$ ， $xy + \frac{1}{xy} = 30$ ，試求 $2xy - 20x + 9$ 之值。

2. 有一個十位數 A ，其數字由左至右分別為 a_1, a_2, \dots, a_{10} ，其中 $a_1 = 1$ ，而 a_2, a_3, \dots, a_{10} 皆為 0 或 1，且滿足 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ ，試求滿足這樣條件的 A 之個數。

3. 若 a, b 是方程式 $x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 4 = 0$ 的兩個根，則 ab 會是方程式 $x^6 - x^5 + c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5 = 0$ 的一個根。
試求 $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$ 之值。

4. 已知 $O(0,0)$ 和 $A(1,0)$ 為直角坐標平面上的兩點，有一點 B 落在以 \overline{OA} 為直徑的圓上且點 B 位於第一象限，試求 $\triangle OAB$ 的內切圓圓心的軌跡方程式。

5. 設 a, b 為整數，如果多項式 $x^2 - x - 1$ 為 $ax^{17} + bx^{16} + 1$ 的因式，試求 a 之值。

6. 若函數 $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 滿足 $f(xf(y)) = f(xy) + 4x$ ，其中 x, y 為正實數，
試求 $\sum_{n=2000}^{2015} f(n)$ 之值。