104 學年度台灣省第六區(台南區)

高級中學數理與資訊學科能力競賽 試題 1

參考解答

1. 設 x, y, z 是三個相異的自然數使得 xyz 是 $(xy-1)(yz-1)(zx-1)$ 之因數。試求所有可能的數對 (x, y, z)。

【參考解答】:

不失一般性，設 $x<y<z$。

因為 $(xy-1)(yz-1)(zx-1)=x^2y^2z^2-x^2yz-xy^2z-xyz^2+xy+yz+zx-1$

且 xyz 是其因數

所以 xyz 是 $xy+yz+zx-1$ 之因數

即

$$xyz \mid (xy+yz+zx-1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

由 $xyz \le xy+yz+zx-1 < xy+yz+zx < xz+yz+zx = z(2x+y)$

可得 $xy < 2x+y < 3y$

所以得 $x<3$

(i) 若 $x=1$，由(*)知 $yz \mid (-y-yz-z+1)$

又 $yz \mid 2yz$

故得 $yz \mid (yz-y-z+1)$

因為 $yz-y-z+1=(y-1)(z-1)\ge 0$ 且 $yz-y-z+1<yz$

所以知 $yz-y-z+1=(y-1)(z-1)=0$

但 $1=x<y<z$

此為矛盾！

(ii) 若 $x=2$，由(*)知 $2yz \mid (2y+yz+2z-1)$

因為 $2yz \le 2y+yz+2z-1$

得 $yz \le 2y+2z-1 < 2y+2z < 4z$

所以得 $2 = x < y < 4$

所以知 $y = 3$

再由(*)得 $6z \mid 5(z+1)$

所以可推得 $z \mid 5$

因 $z > 1$，所以 $z = 5$

由(i)和(ii) 知$(x, y, z) = (2,3,5)$是當$x < y < z$假設下的唯一解。

最後，我們由對稱性可知所有可能數對為

$(x, y, z) = (2,3,5), (2,5,3), (3,2,5), (3,5,2), (5,2,3), (5,3,2)$ 共 6 個。

2. 設數列$\{a_n\}$的前n項和為S_n，已知 $a_1 = 1$ 且

$$(5n-8)S_{n+1} - (5n+2)S_n = -20n - 8，$$

試求 $\displaystyle\sum_{k=101}^{150} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 之值。

解：

$\because (5n-8)S_{n+1} - (5n+2)S_n = -20n - 8$

$$\therefore S_{n+1} = \frac{5n+2}{5n-8}S_n - \frac{20n+8}{5n-8} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

令$\frac{h(n+1)}{h(n)} = \frac{5n+2}{5n-8} \Longrightarrow h(n+1) = \frac{5n+2}{5n-8}h(n)$

由上式可得

$$h(n+1) = \frac{5n+2}{5n-8}\frac{5n-3}{5n-13}\frac{5n-8}{5n-18}\frac{5n-13}{5n-23}\cdots\frac{12}{2}\frac{7}{-3}h(1) = -\frac{(5n+2)(5n-3)}{6}h(1)$$

$$\therefore h(n) = -\frac{(5n-3)(5n-8)}{6}h(1) \Longrightarrow \frac{h(n+1)}{h(n)} = \frac{(5n+2)(5n-3)}{(5n-3)(5n-8)}$$

因此$(*)$可以改寫成

$$S_{n+1} = \frac{(5n+2)(5n-3)}{(5n-3)(5n-8)}S_n - \frac{20n+8}{5n-8}$$

等式兩邊同除以$(5n+2)(5n-3)$可得

$$\frac{S_{n+1}}{(5n+2)(5n-3)} = \frac{S_n}{(5n-3)(5n-8)} - \frac{4}{(5n-3)(5n-8)}$$

$$= \frac{S_n}{(5n-3)(5n-8)} - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5n-8} - \frac{1}{5n-3}\right)$$

由上式可得

$$\frac{S_n}{(5n-3)(5n-8)} = \frac{S_1}{2(-3)} - \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5n-8}\right) = \frac{1}{10} + \frac{4}{5(5n-8)}$$

所以

$$S_n = \frac{(5n-3)(5n-8)}{10} + \frac{4(5n-3)}{5} = \frac{5n^2-3n}{2}$$

由此關係式可得

$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n - 4 \quad (n \geq 2)$

因此，數列$\{a_n\}$為一等差數列，其公差$d = 5$

於是求值式$= \frac{1}{5}\left(\frac{a_{102}-a_{101}}{a_{101}a_{102}} + \frac{a_{103}-a_{102}}{a_{102}a_{103}} + \cdots + \frac{a_{151}-a_{150}}{a_{150}a_{151}}\right)$

$$= \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{a_{101}} - \frac{1}{a_{102}}\right) + \left(\frac{1}{a_{102}} - \frac{1}{a_{103}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{150}} - \frac{1}{a_{151}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{a_{101}} - \frac{1}{a_{151}}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{501} - \frac{1}{751}\right) = \frac{50}{376251}$$

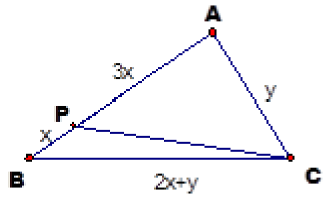
3. 已知ΔABC中，$\overline{BC}=\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{AB}$，若$P$點在$\overline{AB}$上使得$\overline{PA}=3\overline{BP}$，試證：

$\angle CAP=2\angle CPA$。

【參考解答】

令$\overline{BP}=x$，$\overline{AC}=y \Rightarrow \overline{AB}=4x$，$\overline{BC}=2x+y$

$$\Rightarrow \cos\angle CAP=\frac{(4x)^2+y^2-(2x+y)^2}{2\cdot 4x\cdot y}=\frac{12x^2-4xy}{8xy}=\frac{3x^2-xy}{2xy}$$



又$\cos\angle CAP=\dfrac{(3x)^2+y^2-\overline{CP}^2}{2\cdot 3x\cdot y}$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-xy}{2xy}=\frac{(3x)^2+y^2-\overline{CP}^2}{2\cdot 3x\cdot y}$$

$$\Rightarrow \overline{CP}^2=y^2+3xy$$

$$\cos\angle CPA=\frac{(y^2+3xy)+(3x)^2-y^2}{2\cdot\sqrt{y^2+3xy}\cdot 3x}=\frac{xy+3x^2}{2x\sqrt{y^2+3xy}}$$

$$=\frac{y+3x}{2\sqrt{y^2+3xy}}=\frac{\sqrt{y+3x}}{2\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{y+3x}{4y}}$$

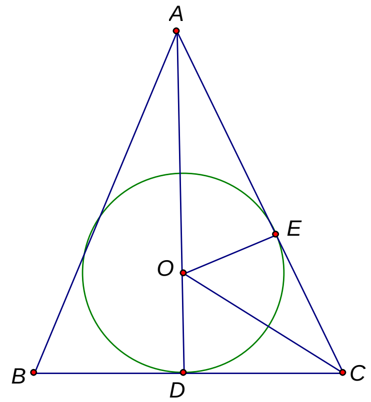
則$\cos\angle CAP-2\cos^2\angle CPA+1=\dfrac{3x^2-xy}{2xy}-2\cdot\dfrac{y+3x}{4y}+1$

$$=\frac{3x-y}{2y}-\frac{y+3x}{2y}+1=0$$

即$\cos\angle CAP=2\cos^2\angle CPA-1\Rightarrow \angle CAP=2\angle CPA$，故得證

4. 在一個正圓錐體內部放入一內切球，設此正圓錐體的表面積和體積分別為 A 和 B，此內切球的表面積和體積分別為 m 和 n，試求 $\log_3\left(\frac{An}{Bm}\right)^2$ 之值。

【參考解答】：



不失一般性設正圓錐母線長 $\overline{AC}$ 為 1，如右圖，

令 $\angle ACO = \angle BCO = \theta$

則正圓錐體的底面半徑 $\overline{CD}$ 為 $\cos 2\theta$，

高 $\overline{AD}$ 為 $\sin 2\theta$

易知內切球的半徑為 $\cos 2\theta \cdot \tan\theta$

因為

$$\frac{A}{m}=\frac{\text{正圓錐體表面積}}{\text{內切球表面積}}=\frac{\pi\cos 2\theta+\pi\cos^2 2\theta}{4\pi\cos^2 2\theta\tan^2\theta}=\frac{1+\cos 2\theta}{4\cos 2\theta\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\cos^2\theta}{4(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\tan^2\theta}=\frac{1}{2\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}$$

$$\frac{B}{n}=\frac{\text{正圓錐體體積}}{\text{內切球體積}}=\frac{\frac{1}{3}\pi\cos^2 2\theta\sin 2\theta}{\frac{4}{3}\pi\cos^3 2\theta\tan^3\theta}=\frac{\tan 2\theta}{4\tan^3\theta}$$

$$=\frac{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{4\tan^3\theta}=\frac{1}{2\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}$$

$$\Rightarrow \quad An=Bm$$

所以 $\log_3\left(\frac{An}{Bm}\right)^2=\log_3 1=0$