

104 學年度台灣省第六區(台南區)

高級中學數理與資訊學科能力競賽 試題 1

注意事項：

- (a) 時間分配：2 小時。
- (b) 本試卷共 4 題，滿分 49 分，第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。
- (c) 將計算證明過程詳敘寫在答案卷上。不可使用電算器。
- (d) 試題與答案卷需一同繳回。

(1). 設 x, y, z 是三個相異的自然數使得 xyz 是 $(xy-1)(yz-1)(zx-1)$ 之因數。試求所有可能的數對 (x, y, z) 。

(2). 設數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n ，已知 $a_1 = 1$ 且

$$(5n-8)S_{n+1} - (5n+2)S_n = -20n-8,$$

試求 $\sum_{k=101}^{150} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 之值。

(3). 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$ ，若 P 點在 \overline{AB} 上使得 $\overline{PA} = 3\overline{BP}$ ，
試證： $\angle CAP = 2\angle CPA$ 。

(4). 在一個正圓錐體內部放入一內切球，設此正圓錐體的表面積和體積分別為 A 和 B ，此內切球的表面積和體積分別為 m 和 n ，試求 $\log_3 \left(\frac{An}{Bm} \right)^2$ 之值。