104 學年度台灣省第六區(台南區)

高級中學數理與資訊學科能力競賽 $\boxed{\text{口試題}}$

參考解答

(口 試 題 1)

令 a, b, c 為相異正整數，如果 $a^2+b^2=c^3$，試問滿足這樣條件的 $a+b+c$ 之最小值為何?

【參考解答】Ans: 5

由於對稱性，為不失去一般性，不妨假設 $a<b$，因為 $a^2+b^2=c^3$ 且要求 $a+b+c$ 之最小值，所以可猜測 $c=5$，因此 $(a,b)=(5,10)$ 或 $(2,11)$。

若 $c>5$ 時，$\therefore c\geq 6 \Rightarrow a^2+b^2=c^3\geq 216 \Rightarrow a\geq 1, b\geq 11 \Rightarrow a+b+c\geq 18$，但當

$a=1, b=11, c=6$ 時，則 $a^2+b^2=1+121=122\neq 216=c^3$，故不合。

(口 試 題 2)

若正實數a,b,c,d滿足 $a+b+c+d=1$，試證明

$$16(a^2+b^2+c^2+d^2)\le 112(a^3+b^3+c^3+d^3)-3$$

【參考解答】:

首先我們注意到原證明不等式

$$16(a^2+b^2+c^2+d^2)\le 112(a^3+b^3+c^3+d^3)-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 7(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{3}{16}$$

(a) 由柯西不等式和$a+b+c+d=1$可得

$$a^3+b^3+c^3+d^3=(a^3+b^3+c^3+d^3)(a+b+c+d)\ge(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

(b) 由柯西不等式得

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)(1+1+1+1)\ge\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2=\frac{1}{4}$$

(c) 由(a)(b)得

$$\begin{aligned}7(a^3+b^3+c^3+d^3)&\ge 7(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\\&\ge\frac{7}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\\&=(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\\&\ge(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{3}{16}\end{aligned}$$

故由上討論可知 $16(a^2+b^2+c^2+d^2)\le 112(a^3+b^3+c^3+d^3)-3$ 成立