104 學年度臺灣省北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）試題 參考解答

問題一： 設 a,b,c 為 ΔABC 之三邊長，且 $\frac{1}{\tan A},\frac{1}{\tan B},\frac{1}{\tan C}$ 成等差數列，試證：a^2,b^2,c^2 亦成等差數列。

【解答】：

因為 $\frac{1}{\tan A},\frac{1}{\tan B},\frac{1}{\tan C}$ 成等差數列，亦即 $\frac{1}{\tan B}-\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{\tan C}-\frac{1}{\tan B}$，所以有

$$\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos C}{\sin C}-\frac{\cos B}{\sin B}$$

由餘弦定理：

$$\begin{aligned} a^2+b^2-c^2&=2ab\cos C,\\ b^2+c^2-a^2&=2bc\cos A,\\ c^2+a^2-b^2&=2ac\cos B. \end{aligned}$$

與正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

可得到

$$\begin{aligned} &\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos A}{\sin A}\\ &=\frac{R(c^2+a^2-b^2)}{abc}-\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}\\ &=\frac{2R(a^2-b^2)}{abc}\\ &=-\frac{2R(b^2-a^2)}{abc} \end{aligned}$$

同理可得到

$$\frac{\cos C}{\sin C}-\frac{\cos B}{\sin B}=-\frac{2R(c^2-a^2)}{abc}$$

故有

$$-\frac{2R(b^2-a^2)}{abc}=-\frac{2R(c^2-a^2)}{abc}\Leftrightarrow b^2-a^2=c^2-a^2$$

亦即 a^2,b^2,c^2 亦成等差數列。

問題二： 整數數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的「**差積**」定義為 $P = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$，即數列的每一項減去前面各項的差之乘積；例如：數列 $1,2,4,7$ 的差積為

$$P = (2-1)(4-1)(4-2)(7-1)(7-2)(7-4) = 540 \text{。}$$

試求最小正整數 n 使得任意整數數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的差積都是 2015^2 的倍數。

【解答】：

利用鴿籠原理，不難看出以下的引理：

任意 $q+1$ 個整數中必有一組數 a,b 滿足 $a-b$ 是 q 的倍數。更進一步的，

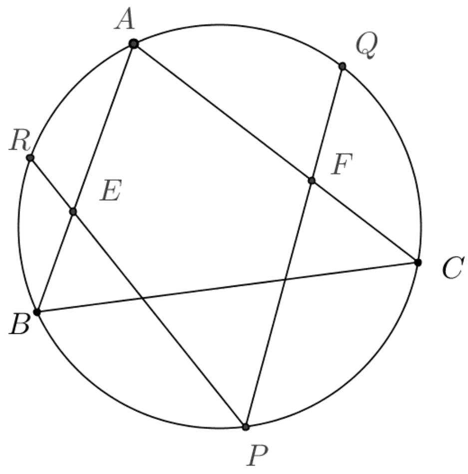
當 $1 \le m \le q$ 時，任意 $q+m$ 個整數中必有 m 組數 a,b 滿足 $a-b$ 是 q 的倍數。

令 $f(k)$ 表示滿足下列條件的最小正整數 n：任意整數數列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的差積都是 $2015^k = 5^k \cdot 13^k \cdot 31^k$ 的倍數。

由於 $2015^2 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2$，任意整數數列 $a_1, a_2, \cdots, a_{33}$ 中必有 2 組數 a,b 滿足 $a-b$ 是 31 的倍數。故其差積必為 31^2 的倍數，當然也會是 5^2 與 13^2 的倍數，故 $f(2) \le 33$。又數列 $1,2,3,\cdots,32$ 的差積不是 31^2 的倍數，自然不是 2015^2 的倍數，故 $f(2)=33$。

$$\textbf{一般式：}\ f(k) = \begin{cases} 31+k, & \text{當 } 1 \le k \le 31 \\ 62 + \left[\dfrac{k-30}{2}\right], & \text{當 } 32 \le k \le 62 \end{cases} \text{。}$$

問題三：在 ΔABC 及其外接圓中，如圖，P, Q, R 分別為 BC, CA, AB 的中點，且 $\overline{PR}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E 點，$\overline{PQ}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F 點。試證：$\overline{EF} // \overline{BC}$ 。



【解答】：

(1) 令 $\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{CR}$ 三角平分線交於 I 點。

(2) $\angle BAP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \angle CRP$，故 A, I, E, R 四點共圓。

(3) $\angle AEI = \angle ARI = \angle ARC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ 。

(4) $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，故 $\overline{EI} // \overline{BC}$ 。

(5) 同理 $\overline{FI} // \overline{BC}$ ，故 $\overline{EF} // \overline{BC}$ 。