

104 學年度臺灣省北二區 (新竹高中)
普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試 (一) 試題

編號： _____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 設 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 之三邊長，且 $\frac{1}{\tan A}, \frac{1}{\tan B}, \frac{1}{\tan C}$ 成等差數列，試證：
 a^2, b^2, c^2 亦成等差數列。

(16 分)

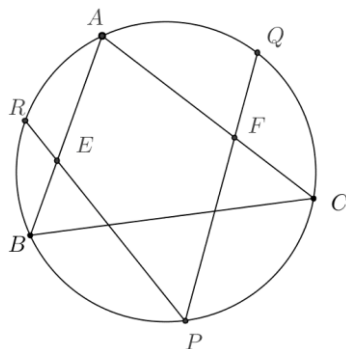
問題二： 整數數列 a_1, a_2, \dots, a_n 的「差積」定義為 $P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ ，即數列的每一項減去前面各項的差之乘積；例如：數列 1, 2, 4, 7 的差積為

$$P = (2-1)(4-1)(4-2)(7-1)(7-2)(7-4) = 540。$$

試求最小正整數 n 使得任意整數數列 a_1, a_2, \dots, a_n 的差積都是 2015^2 的倍數。

(16 分)

問題三： 在 $\triangle ABC$ 及其外接圓中，如圖， P, Q, R 分別為 BC, CA, AB 的中點，且 \overline{PR} 交 \overline{AB} 於 E 點， \overline{PQ} 交 \overline{AC} 於 F 點。試證： $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ 。



(17 分)