新北市 104 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)試題 參考解答

編號：____________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 展開 $(1-2x)^7=\sum_{k=0}^{7}a_kx^k$ ，求 $2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7=$____(一)____。

【參考解答】0

對 $(1-2x)^7=\sum_{k=0}^{7}a_kx^k$ 微分，得

$$-14(1-2x)^6=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+7a_7x^6$$

令 $x=0$ 得 $a_1=-14$ ；令 $x=1$ 得 $a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7=-14$ 。

故所求為 $-14-(-14)=0$ 。

2. 設 P 為橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$ 上的一點， $\overline{EF}$ 為圓 $(x-1)^2+y^2=4$ 的一條直徑。則內積 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的範圍為____(二)____。

【參考解答】$[5,21]$

O 為圓心，$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OE}$ ，$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OE}$

故 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OE})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OE})=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-\left|\overrightarrow{OE}\right|^2=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-4$ 。

又 O 恰為橢圓右焦點，故 $3\le\left|\overrightarrow{PO}\right|\le 5$ ，故所求為 $[5,21]$ 。

3. 已知 (x, y) 為滿足下列聯立方程組的實數解，求 $x =$ ____(三)____ 。

$$\begin{cases} -1 - x^2 + 2\cos(xy) + x\sin(xy) = 0 \\ x + x\cos(xy) - 2\sin(xy) = 0 \end{cases}$$

【參考解答】 $x = \pm 1$

可由移項解得

$$\cos^2(xy) = \left(\frac{x^2+2}{x^2+4}\right)^2$$

$$\sin^2(xy) = \left(\frac{x(x^2+3)}{x^2+4}\right)^2$$

因 $\cos^2(xy) + \sin^2(xy) = 1$ ，我們有

$$\frac{(x+2)^2 + (x(x^2+3))^2}{(x^2+4)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2+4} = 1$$

令 $v = x^2$ ，所以 $v > 0$ 。上次可轉為

$$x^4 + 2x^2 - 3 = v^2 + 2v - 3 = 0$$

可得 $v = -4$ 或 1。因此 $x = \pm 1$ 。

4. 設 k 為正實數，若方程式 $\left|x^2 - 2x\right| - x + 1 = k$ 有 4 個相異實數根，則 k 的範圍為 (四) 。

【參考解答】 $1 < k < \dfrac{5}{4}$

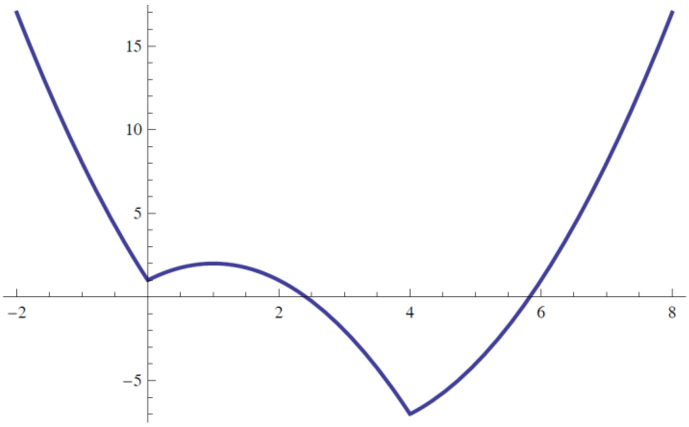
設 $f(x) = \left|x^2 - 2x\right| - x + 1$

若 $x^2 - 2x > 0$ ，則 $x > 2$ 或 $x < 0$ ，此時 $f(x) = (x - \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{5}{4}$ 。

若 $x^2 - 2x < 0$ ，則 $0 < x < 2$，此時

$$f(x) = -x^2 + 2x - x + 1 = -x^2 + x + 1 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \qquad (1)$$

函數圖形如下：



所以，式(1)的最大值為 $\dfrac{5}{4}$ 。看圖，得 $1 < k$ ，所以 $1 < k < \dfrac{5}{4}$ 。

5. 將 1000 顆球，隨意投入 20 個相異的箱子中，當一個箱子裡的球數超過 50，即稱此箱為「重箱」，裡面的球為「重球」。設重球率 $=\dfrac{\text{重球數}}{1000}$、重箱率 $=\dfrac{\text{重箱數}}{1000}$，則「重球率大於重箱率」的機率為____(五)____。

【參考解答】100%

假設有 K 個重箱，這些箱子中，總共有 k 顆球；L 個非重箱，這些箱子中總共有 ℓ 顆球。因此 $\dfrac{\ell}{k}<\dfrac{L}{K}$。

兩邊同時加 1，得 $\dfrac{k+\ell}{k}<\dfrac{K+L}{K}$，取倒數得 $\dfrac{k}{k+\ell}<\dfrac{K}{K+L}$。

所以重球率恆大於重箱率，答案為「100%」。

6. 設多項式 $P(x)$ 滿足 $P(x^2+1)=P(x)^2+1$ 且 $P(0)=0$，則 $P(104)=$____(六)____。

【參考解答】 104

$$\begin{gathered}P(0)=0\\P(1)=P(0)^2+1=1\\P(2)=P(1)^2+1=2\\P(5)=P(2)^2+1=5\\P(26)=P(5)^2+1=26\\P(677)=P(26)^2+1=677\\\vdots\end{gathered}$$

以此類推，有無限多個值滿足多項式的固定點，故 $P(x)=x$，所以 $P(104)=104$。

7. 如下圖。設平面上 A、B 兩點位於直線 L 的同側，且直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 L 於點 P。設 $\overline{AP}=4$ 和 $\overline{BP}=8$，且在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上取另一點 C 使得 $\overline{AP}=\overline{PC}$。以線段 $\overline{BC}$ 為直徑作半圓。過 P 點做一直線，此直線垂直於直線 $\overleftrightarrow{AB}$，且交半圓於 D 點。再以 P 為圓心，$\overline{PD}$ 為半徑作圓，此圓交直線 L 於 E、F 兩點，試求線段 $\overline{EF}$ 的長度 $=$____(七)____。

【參考解答】$4\sqrt{5}$

連線段 $\overline{BD}$ 和 $\overline{DC}$，

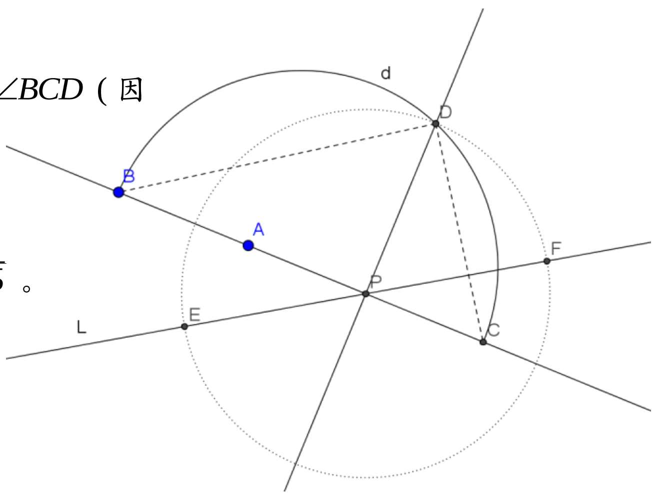
因 $\angle DPB=\angle DPC=90^\circ$ 且 $\angle BDP=\angle BCD$（因 $\angle B+\angle BDP=\angle B+\angle BCD=90^\circ$）

所以 $\Delta BPD\sim\Delta DPC$。

則由 $\dfrac{\overline{PD}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PD}}$ 得，故 $\overline{PD}=\sqrt{\overline{BP}\times\overline{AP}}$。

故 $\overline{EF}=2\overline{PD}=8\sqrt{2}$。

□



新北市 104 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(二)答案卷

編號：____________(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分為 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答案欄

（一）	（二）	（三）	（四）
0	$[5,21]$ 或寫 $5\le\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}\le 21$	± 1	$(1,\frac{5}{4})$ 或寫 $1<k<\frac{5}{4}$
（五）	（六）	（七）	
100%	104	$8\sqrt{2}$	

總計：____________________