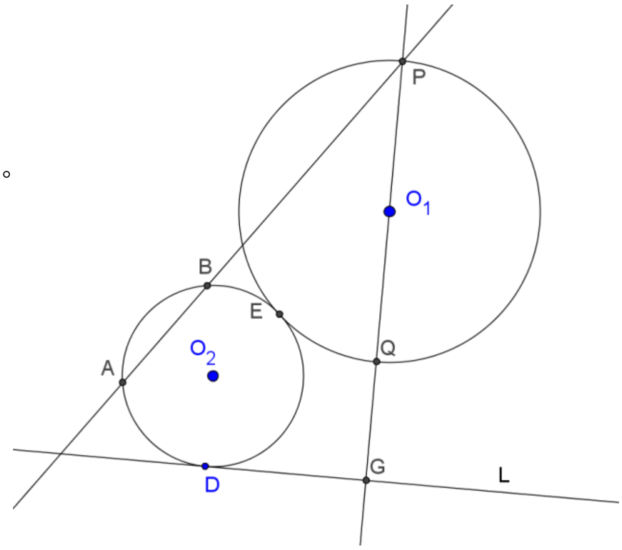
新北市 104 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試(一)試題 參考解答

【問題一】

已知圓 O_1 和 O_2 相切於一點 E，且一直線 L 切圓 O_2 於一點 D(如圖)。過點 O_1 作垂直 L 的直線交圓 O_1 於 P、Q 兩點，且交直線 L 於 G 點。過 P 點任作一直線交圓 O_2 於 A、B 兩點，試證：

(1) P、D、E 三點共線；

(2) A、B、Q、G 四點共圓。



(12 分)

【參考解答】

(1)已知 O_1、O_2、E 三點共線，連線段 $\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2D}$、$\overline{PE}$、$\overline{ED}$。

因 $\angle\alpha=\angle\beta$、$\angle\gamma=\angle\delta$

且由 $\overline{O_2D} \,||\, \overline{PQ}$ 得 $\angle DO_2E=\angle EO_1P$，則 $\angle\alpha=\angle\gamma$ $(=\angle\beta=\angle\delta)$

故 P,D,E 三點共線。 □

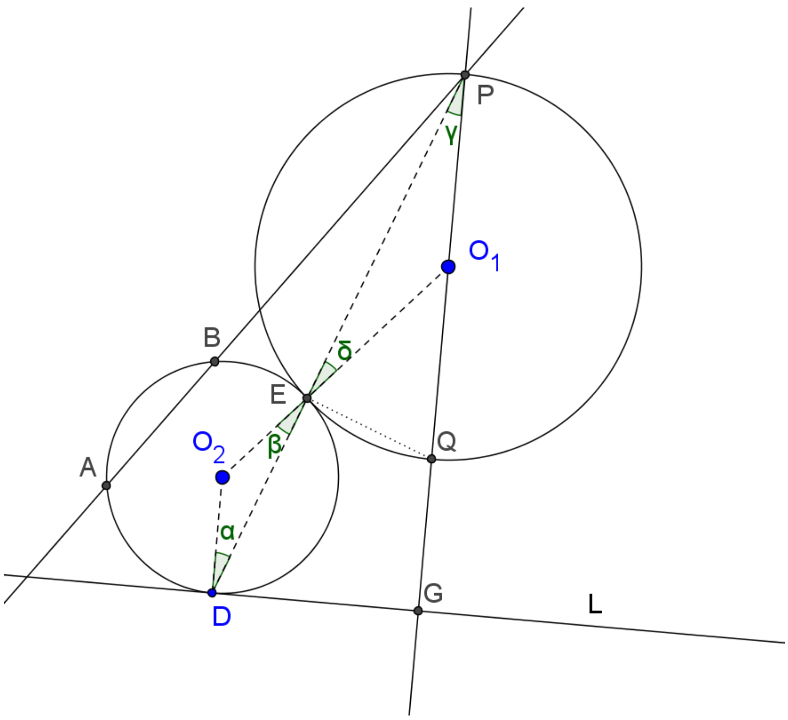
(2)因 $\angle PGD=\angle PEQ=90^\circ$，故 D,E,Q,G 四點共圓。

得 $\overline{PQ}\times\overline{PG}=\overline{PE}\times\overline{PD}$

再由 A,B,E,D 共圓，得 $\overline{PE}\times\overline{PD}=\overline{PB}\times\overline{PA}$

所以可得

$\overline{PQ}\times\overline{PG}=\overline{PB}\times\overline{PA}$，此隱含 A,B,Q,G 共圓。 □



【問題二】

試求$49\times 47\times 45\times\cdots\times 3\times 1$的末三位數字是多少？

(12 分)

【參考解答】625

末三位即為 modulo 1000 的餘數，又$1000=8\times 125$，

又$1\times 3\times 5\times 7\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,8)$

且$9\times 11\times 13\times 15=(8k+1)(8k+3)(8k+5)(8k+7)=8k'+105\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,8)$

而$n!!$在$n\geq 25$後都是125的倍數。

從 25 後，每 4 個 1 循環，$(49-24)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4)$，所以$49!!\equiv 25!!\equiv 625\ (\mathrm{mod}\,1000)$。

【問題三】

若 a 、 b 、 c 恰為 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三個有理根，求此時 a 、 b 、 c 分別為何？

(12 分)

【參考解答】$(a,b,c)=(1,-2,0),(0,0,0),(1,-1,-1)$

根據根與係數的關係

$$\begin{cases} a+b+c & = & -a\cdots(1) \\ ab+bc+ca & = & b\ \cdots(2) \\ abc & = & -c\cdots(3) \end{cases}$$

若 $c=0$ 推得 $2a+b=0$ 與 $ab=b$ ，得到兩組解 $a=1$ ，$b=-2$ 或 $a=0$ ，$b=0$ 。

若 $c\neq 0$ 推得 $ab=-1$ ，代回 (2) 式 $c(a+b)=b+1$

討論，若 $a+b=0$，得到第 3 組解 $b=-1$， $a=1$， $c=-1$。

若 $a+b\neq 0$ ， $c=\dfrac{b+1}{a+b}=\dfrac{a(b+1)}{a(a+b)}=\dfrac{-1+a}{a^2-1}=\dfrac{1}{a+1}$

代回 (1) 得到 $2a-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}=0$ ，也就是 $3a^3+2a^2-1=0$ ，沒有有理根。

依以上討論，滿足條件的 (a,b,c) 共有 3 組： $(a,b,c)=(1,-2,0),(0,0,0),(1,-1,-1)$ 。

【問題四】

已知有一個$n\times n$ ($n\geq 1$)的方格表，其方格如西洋棋盤般黑白相間塗色，且最左上角的格子為黑色。每一次的操作可以任意選擇一個2×2的田字形四格方格，然後把這四格的顏色各自變成相反的顏色。

(1)一開始是8×8的方格表，能否將所有方格變成白色？

(2)一開始是7×7的方格表，能否將所有方格變成白色？

(3)一開始是6×6的方格表，能否將所有方格變成白色？

(13 分)

【參考解答】(1)可以；(2)不行；(3)不行。

(1)可以。以(i, j)表示選取之田字形之左上角之列與行座標。觀察4×4可以經由以下操作變為全部白色：

$$(1,1)\to(3,3)\to(2,1)\to(2,3)\to(1,2)\to(3,2)$$

同理4×4可以全部變成黑色，因為8×8可以分成四大塊4×4，故必可所有方格變成白色。

(2)不行。田字型內的黑色格子數經過操作後奇偶性不會改變。一開始有 25 個黑色，不可能變成 0 個黑色。

(3)不行。來關注第一行、第三行、第五行的 18 格。任一操作剛好會用到其中兩格，並變色。但這 18 格中一開始黑色格子共有 9 格；白色格子亦共有 9 格。故這些黑色格子要變成全白，要經過奇數次操作。但白色格子要維持是白色，要經過偶數次操作，因此不可能。