

**新北市 104 學年度  
高級中學數理及資訊學科能力競賽  
數學科筆試(一)試題**

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

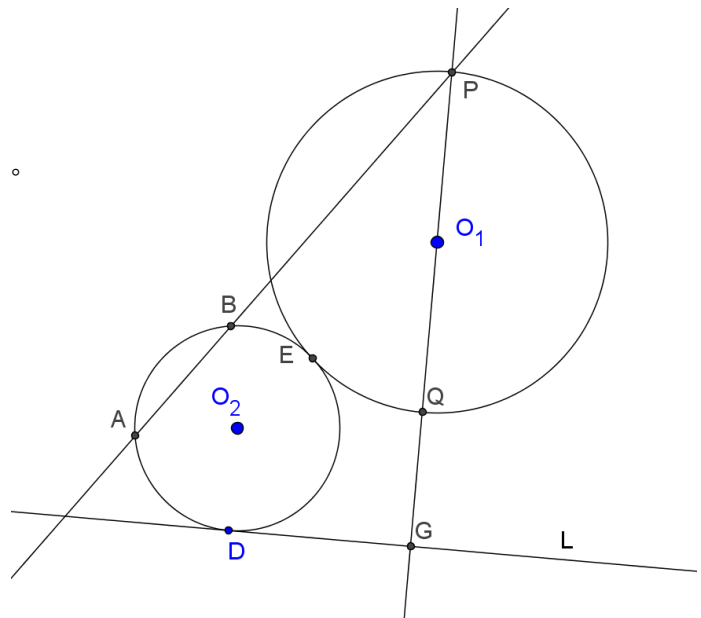
**注意事項：**

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

**【問題一】**

已知圓  $O_1$  和  $O_2$  相切於一點  $E$ ，且一直線  $L$  切圓  $O_2$  於一點  $D$ 。過點  $O_1$  作垂直  $L$  的直線交圓  $O_1$  於  $P$ 、 $Q$  兩點，且交直線  $L$  於  $G$  點(如圖)。過  $P$  點任作一直線交圓  $O_2$  於  $A$ 、 $B$  兩點，試證：

- (1)  $P$ 、 $E$ 、 $D$  三點共線；
- (2)  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ 、 $G$  四點共圓。



(12 分)

<背面尚有試題>

**【問題二】**

試求  $49 \times 47 \times 45 \times \cdots \times 3 \times 1$  的末三位數字是多少？

(12 分)

**【問題三】**

若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  恰為  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  的三個有理根，求此時  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別為何？

(12 分)

**【問題四】**

已知有一個  $n \times n$  ( $n \geq 1$ ) 的方格表，其方格如西洋棋盤般黑白相間塗色，且最左上角的格子為黑色。每一次的操作可以任意選擇一個  $2 \times 2$  的田字形四格方格，然後把這四格的顏色各自變成相反的顏色。

- (1) 一開始是  $8 \times 8$  的方格表，能否將所有方格變成白色？
- (2) 一開始是  $7 \times 7$  的方格表，能否將所有方格變成白色？
- (3) 一開始是  $6 \times 6$  的方格表，能否將所有方格變成白色？

(13 分)

**新北市 104 學年度  
高級中學數理及資訊學科能力競賽  
數學科筆試(一)答案卷**

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

**注意事項：**

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

**評分欄**

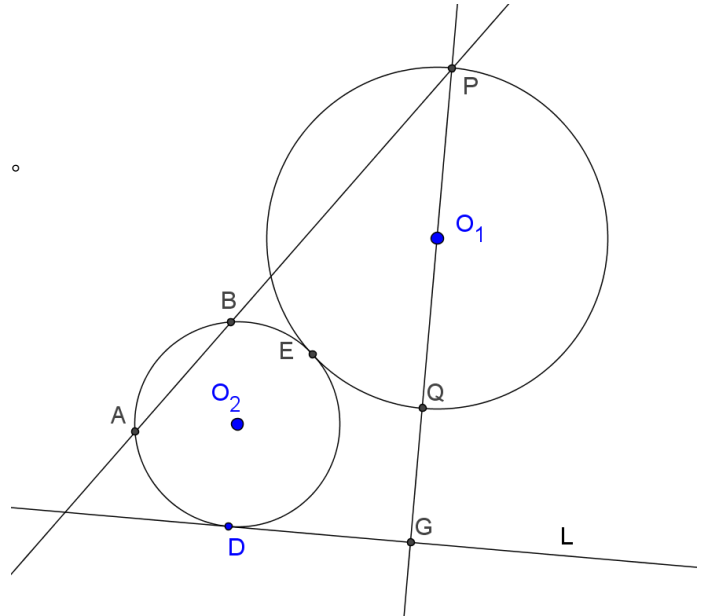
	問題一	問題二	問題三	問題四
得 分				

總計：\_\_\_\_\_

**【問題一】**

已知圓  $O_1$  和  $O_2$  相切於一點  $E$ ，且一直線  $L$  切圓  $O_2$  於一點  $D$ 。過點  $O_1$  作垂直  $L$  的直線交圓  $O_1$  於  $P$ 、 $Q$  兩點，且交直線  $L$  於  $G$  點(如圖)。過  $P$  點任作一直線交圓  $O_2$  於  $A$ 、 $B$  兩點，試證：

- (1)  $P$ 、 $E$ 、 $D$  三點共線；
- (2)  $A$ 、 $B$ 、 $Q$ 、 $G$  四點共圓。



(12 分)

**【解】：**



**【問題二】**

試求  $49 \times 47 \times 45 \times \cdots \times 3 \times 1$  的末三位數字是多少？

(12 分)

**【解】：**



**【問題三】**

若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  恰為  $x^3+ax^2+bx+c=0$  的三個有理根，求此時  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別為何？

(12 分)

**【解】：**





**【問題四】**

已知有一個  $n \times n$  ( $n \geq 1$ ) 的方格表，其方格如西洋棋盤般黑白相間塗色，且最左上角的格子為黑色。每一次的操作可以任意選擇一個  $2 \times 2$  的田字形四格方格，然後把這四格的顏色各自變成相反的顏色。

- (1) 一開始是  $8 \times 8$  的方格表，能否將所有方格變成白色？
- (2) 一開始是  $7 \times 7$  的方格表，能否將所有方格變成白色？
- (3) 一開始是  $6 \times 6$  的方格表，能否將所有方格變成白色？

(13 分)

**【解】：**

