104 學年度北一區 (花蓮高中)

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

(數學科筆試一答案卷)參考解答

編號：______________________（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 46 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序寫在答案卷內。

問題一： 在 ΔABC 中，若 $\tan A=\dfrac{1}{2}$，$\tan B=\dfrac{1}{3}$，且最長的邊之長度為1，則最短的邊之長度為何?

(12 分)

【解答】：

利用 $\tan A=\dfrac{1}{2},\tan B=\dfrac{1}{3}$ 算 $\tan C$ 的值，得

$$\begin{aligned}\tan C&=\tan(180°-(A+B))\\&=-\tan(A+B)\\&=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\\&=-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\\&=-1\text{ 。}\end{aligned}$$

因為由 $\tan A=\dfrac{1}{2},\tan B=\dfrac{1}{3},\tan C=-1$ 的大小，

可看出 $\angle B<\angle A<\angle C$，

所以最長邊為$\overline{AB}=1$，最短邊為$\overline{AC}$。

又由$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\sin C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$及正弦定理，得

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}\Rightarrow\frac{\overline{AC}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$ 。

故$\overline{AC}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$。

問題二：設三角形的三邊長分別為a,b,c，証明:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc.$$

(12 分)

【證明】：

設$x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$，由三角不等式知:
x,y,z均為正數及

$$\frac{x+y}{2}=c,\frac{y+z}{2}=a,\frac{z+x}{2}=b$$

由$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy},\frac{y+z}{2}\ge\sqrt{yz},\frac{z+x}{2}\ge\sqrt{zx}$得

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\cdot\frac{z+x}{2}\ge xyz，$$

即

$$abc\ge(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc,$$

移項得証。

問題三： 已知實數a,b,c滿足

$$\begin{cases} a+b+c=2\ , \\ \dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

求abc的值。

(10 分)

【解答】：

將第一式代入第二式，第二式可改寫為

$$\frac{1}{2-2c}+\frac{1}{2-2a}+\frac{1}{2-2b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}=1$$

即 $\dfrac{(1-b)(1-a)+(1-c)(1-a)+(1-c)(1-b)}{(1-c)(1-b)(1-a)}=1$，

得 $(1-b)(1-a)+(1-c)(1-a)+(1-c)(1-b)=(1-c)(1-b)(1-a)$

乘開得 $1-a-b+ab+1-a-c+ac+1-b-c+bc=1-a-b-c+ab+ac+bc-abc$

也就是 $abc=0.$

問題四：證明 $x^2+3xy-2y^2=122$ 沒有整數解 (x,y)。

(12 分)

【證明】：

設 (x,y) 為一組整數解，即 (x,y) 滿足

$x^2+3xy-2y^2=122 \Rightarrow 4(x^2+3xy-2y^2)=488=17\times 29-5$

$\Rightarrow (2x+3y)^2-17y^2=17\times 29-5$

得 $17|(2x+3y)^2+5$，即 $(2x+3y)^2$ 除以 17 的餘數為 12。

當 $2x+3y=17k+a$ 時，其中 k 為整數，$a=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,\pm7,\pm8$，

$(2x+3y)^2+5=(17k+a)^2+5.$

$(17k+a)^2+5$ 除以 17 的餘數與 a^2+5 除以 17 的餘數一樣，

但將 $a=0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,\pm7,\pm8$ 代入，a^2+5 均不被 17 整除，
故假設有解錯誤，得証。