

**104 學年度北一區 (花蓮高中)**  
**普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽**

**數學科口試試題參考解答**

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

**注意事項：**

1. 本口試卷共 2 題，思考時間 15 分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間 15 分鐘，並繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的精確度。

**【試題一】**

是否會發生：有六個人，其中一定有三個人是「兩兩互相認識」或是「兩兩皆不認識」的情況。若有，請舉例，若沒有，請說明。

**【解答】**

任取 1 人名為 A，其餘 5 人可分為兩類：「與 A 認識」與「與 A 不認識」。

由鴿籠原理，必有一類人數  $\geq 3$ 。令此 3 人之名為 B、C、D：

(一) 若 B、C、D 與 A 認識：

(1) 若 B、C、D 存在兩人相識，則 A 與這兩人滿足「兩兩互相認識」。

(2) 若 B、C、D 不存在兩人相識，則 B、C、D 滿足「兩兩皆不認識」。

(二) 同理，若 B、C、D 與 A 皆不認識：

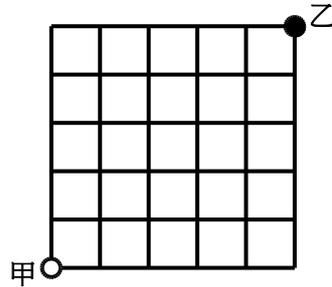
(1) 若 B、C、D 存在兩人不相識，則 A 與這兩人滿足「兩兩皆不認識」。

(2) 若 B、C、D 不存在兩人不相識，則 B、C、D 滿足「兩兩互相認識」。

(三) 由(一)、(二)得證。

## 【試題二】

在一張  $5 \times 5$  的棋盤，甲持白子在左下角的位置，乙持黑子在右上角的位置。



隨後兩人輪流（甲先，乙後）移動自己的棋子，每一次可沿一條橫線或一條縱線之一至少走一格，即甲每次只能向右或往上移動白色棋子；而乙每次只能向左或往下移動黑色棋子，並遵守如下規則：

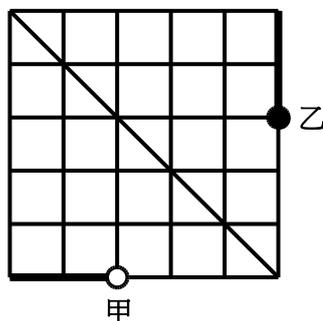
1. 不允許與對方的棋子在同一水平或鉛直線上。
2. 不能越過對方棋子所在的水平或鉛直線。

勝負規則是：輪到誰無路可走就算失敗。完成下列兩個問題：

- (1) 誰有取勝的策略。
- (2) 如果棋盤大小改成  $8 \times 5$ ，那麼結果又如何？

## 【解答】

- (1) 如下圖所示，當甲移動白子之後，乙以圖中的對角線作對稱軸，將黑子移到與白子對稱的位置。這時白子與黑子仍然位於某正方形的兩個對頂角上。依這樣的規律，先玩的甲會落敗。也就是說，後玩的乙只需採取對稱反對角線的策略，就會得勝。



- (2) 甲將白子向右移 2 格且乙將黑子向左移 1 格，此時白子與黑子位於  $5 \times 5$  正方形的斜對角點上，而且變成乙先玩。由(1)知道後玩者採取對稱的策略可贏，故甲可以贏得比賽。