# 104學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

# 南區（高雄區） 筆試（二）參考解答

一、符號 $f^{(2)}(x)=f(f(x))$， $f^{(n)}(x)=\overbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}^{n\text{次}}$。

已知: $f(x)=7x+6$，求證: 存在正整數 $m$ 滿足 $f^{(100)}(m)$ 被 2015 整除。

【參考解答】

$f^{(2)}(x)=f(f(x))=f(7x+6)=7^2x+6(7+1)$

$f^{(3)}(x)=f(f(f(x)))=7^3x+6(7^2+7+1)$

...

$f^{(n)}(x)=7^nx+6(7^{n-1}+\cdots+7+1)=7^n(x+1)-1$

因為 $2015=5\times13\times31$ 與 $7^{100}$互質，所以，存在非零整數 $u,\ v$ 滿足

$$7^{100}u-2015v=1$$

Case 1. $u>1$

取 $m=u-1>0$，所以

$f^{(100)}(m)=7^{100}(m+1)-1=7^{100}u-1=2015v$

$f^{(100)}(m)$ 被 2015 整除。

Case 2. $u=1$

取 $m=7^{100}-1>0$，所以

$f^{(100)}(m)=7^{100}(m+1)-1=7^{100}\times7^{100}-1=(7^{100}+1)(7^{100}-1)$

因為 $u=1$，所以 $7^{100}-2015v=1$， $f^{(100)}(m)=(7^{100}+1)(2015v)$

$f^{(100)}(m)$ 被 2015 整除。

Case 3. $u<0$

取 $m=(7^{100}-1)(-u)>0$，所以

$f^{(100)}(m)=7^{100}(m+1)-1=7^{100}[(7^{100}-1)(-u)+1]-1$

$=(7^{100}-1)[7^{100}(-u)+1]$

因為$7^{100}u-2015v=1$，所以 $7^{100}(-u)+1=-2015v$，

$f^{(100)}(m)=(7^{100}-1)(-2015v)$

$f^{(100)}(m)$ 被 2015 整除。

二、設 $n \in N$，$S_n = \sum_{k=2}^{n}[\log_2 k]$，求使得 $S_n \geq 2015$ 成立的最小 $n$ 值。(符號$[x]$為不大於 $x$ 的最大整數）

【參考解答】

$$S_{2^n-1} = \sum_{k=2}^{2^n-1}[\log_2 k] = \sum_{k=1}^{n-1} k \times 2^k$$

$n = 2^8 - 1 = 255$，$S_n = 1538$

$n = 2^9 - 1 = 511$，$S_n = 1538 + 8 \times 2^8 > 2015$

因此 $1538 + 8x > 2015$，$x \geq 60$

$n = 255 + 60 = 315$

三、證明由 1 至 200 之中任取 101 個相異整數，必有兩個數的差等於 10。

【參考解答】

將 1 至 200 的這 200 個數依除以 10 之後的餘數分為十組，
取 101 個數代表必有某組被取至少 11 個數。
設該組為除以 10 餘$k$的數，其中$1 \leq k \leq 10$。
則將改組的 20 個數分為 10 個配對
$\{k, k+10\}$, $\{k+20, k+30\}$, $\{k+40, k+50\}$, $\{k+60, k+70\}$,
$\{k+80, k+90\}$, $\{k+100, k+110\}$, $\{k+120, k+130\}$,
$\{k+140, k+150\}$, $\{k+160, k+170\}$, $\{k+180, k+190\}$
因該組中被取的數至少有 11 個，可知必有兩個在同個配對，
此兩數的差等於 10。

四、設 $x>0$， $f(x)=\dfrac{4x^2-\sqrt{16x^4+8x^2+9}+3}{2x}$，求 $f(x)$ 的值域為何？

【參考解答】

$$f(x)=2x+\frac{3}{2x}-\sqrt{4x^2+\frac{9}{4x^2}+2}$$

$$\left(\sqrt{4x^2+\frac{9}{4x^2}+6}+\sqrt{4x^2+\frac{9}{4x^2}+2}\right)\cdot f(x)=4$$

$$f(x)\le\frac{4}{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$f(x)=\sqrt{4x^2+\frac{9}{4x^2}+6}+\sqrt{4x^2+\frac{9}{4x^2}+2}>0$$

所以值域為 $(0,2(\sqrt{3}-\sqrt{2})]$