104 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄） 筆試（一） 參考解答

一、已知 a 為小於 10000 為正整數，b 為正奇數且 $\dfrac{58^b + a\times 31^b}{2403}$ 為正整數，求滿足這些條件中，a 的最大值及最小值之和為何？

【參考解答】

$2403 = 89\times 27$

$0 \equiv 58^b + a\cdot 31^b \equiv 31^b(a-1) \pmod{89}$

$0 \equiv 58^b + a\cdot 31^b \equiv 31^b(a+1) \pmod{27}$

$a = 89m+1$ 及 $a = 27n-1$

$2 = 27\times(-23) - 89\times(-7) + 27\times 89k - 27\times 89k$

$2 = 27\times(89k-23) - 89\times(27k-7)$

$k=1 \quad a = 1781$

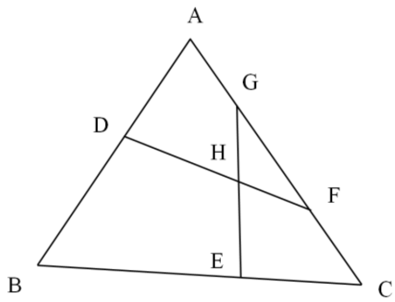
$k=4 \quad a = 8990$

故和為 10771

二、如圖:

三角形 ABC 中，D, E, F, G 分別是 AB, BC, CA, CA 邊上的點，DF 與 EG 相交於 H 點。

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{c}{d}$, $\dfrac{CF}{FA} = \dfrac{e}{f}$, $\dfrac{CG}{GA} = \dfrac{g}{h}$ 。

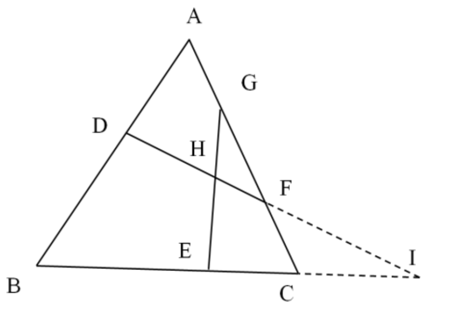


證明: $\dfrac{GH}{HE} = \dfrac{a(c+d)(fg-eh)}{(h+g)(bdf+ace)}$

【參考解答】

作輔助線如圖:

延長 DF 與 BC 相交於 I 點。



觀察三角形 ABC 中，D, F, I 共線，由 Menelaus 定理，得知

$$\frac{AF}{CF}\cdot\frac{DB}{AD}\cdot\frac{IC}{BI}=1$$

所以,

$$\frac{f}{e}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{IC}{BI}=1,\quad \frac{IC}{BC}=\frac{ae}{bf-ae}\text{ 。}$$

又已知 $\frac{BE}{EC}=\frac{c}{d}$, $\frac{BE+EC}{EC}=\frac{c+d}{d}$, 考慮線段長比例: $\begin{array}{ccc} IC & BC & EC \\ ae & bf-ae & \\ & c+d & d \end{array}$

所以,

$$\frac{EC}{CI}=\frac{d(bf-ae)}{ae(c+d)},\quad \frac{IC}{EI}=\frac{ae(c+d)}{dbf+aec}\text{ 。}$$

又已知 $\frac{CF}{FA}=\frac{e}{f}$, $\frac{CG}{GA}=\frac{g}{h}$, 考慮線段長比例: $\begin{array}{ccc} CF & AC & GA \\ e & e+f & \\ & g+h & h \end{array}$

所以,

$$\frac{CF}{GA}=\frac{e(g+h)}{h(e+f)},\quad \frac{GF}{CF}=\frac{(e+f)(g+h)-h(e+f)-e(g+h)}{e(g+h)}=\frac{gf-eh}{e(g+h)}\text{ 。}$$

觀察三角形 GEC 中, H, F, I 共線,

由 Menelaus 定理, 得知

$$\frac{GH}{HE}\cdot\frac{EI}{IC}\cdot\frac{CF}{FG}=1$$

$$\frac{GH}{HE}\cdot\frac{dbf+aec}{ae(c+d)}\cdot\frac{e(g+h)}{gf-eh}=1,\quad \frac{GH}{HE}=\frac{a(c+d)(gf-eh)}{(g+h)(dbf+aec)}\text{ 。}$$

三、求方程式 $2x(6x-3y-7)=y(7-3y)$ 的所有整數解。

【參考解答】

$3(4x^2-2xy+y^2)=7(2x+y)$

令 $a=2x+y$, $b=2x-y$

$3(a^2+3b^2)=28a$

令 $a=3p$ a,p 為非負整數

$3(3p^2+b^2)=28p$

令 $p=3q$ q 為非負整數

$b^2=q(28-27q)$

所以 $q=0$ 或 $q=1$

(i) $q=0$, 則 $b=0, p=0, a=0$

故 $x=y=0$

(ii) $q=1$ 則 $b=\pm1, p=3, a=9$

$b=-1$ 因此 $x=2, y=5$

四、證明$1<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[1120]{1120}}}}<2$。

【參考解答】

設$a_1=\sqrt[1120]{1120}$，可知$1<a_1=\sqrt[1120]{1120}<2$。

對$2\leq \mathrm{k}\leq 1119$，設$a_k=\sqrt[1120-k+1]{1120-k+1+a_{k-1}}$，

可知$a_{1119}=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[1120]{1120}}}}$。

假設$1<a_{k-1}<2$，其中$2\leq \mathrm{k}\leq 1119$。
由$1120-k+1+a_{k-1}>1120-k+2>1$，可知$1<a_k$。
另外，利用當$x\geq 2$時，$x+2\leq 2^x$，可得出
$1120-k+1+a_{k-1}<1120-k+1+2\leq 2^{1120-k+1}$，即可知$a_k<2$。
故可得出，$1<a_k<2$，其中$1\leq \mathrm{k}\leq 1119$。

可得證$1<a_{1119}=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[1120]{1120}}}}<2$。