

# 104 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

## 南區（高雄區）口試試題 參考解答

### 口試題一

若一個整數能寫成另一個整數的平方，則稱其為平方數。

- A. 試求出一個  $2 \times 2$  的整係數矩陣，使得每一行及每一列之和都是相異的平方數。
- B. 試求出一個  $3 \times 3$  的整係數矩陣，使得每一行及每一列之和都是相異的平方數。
- C. 給定一個大於或等於 4 的正整數  $n$ ，該如何建構出一個  $n \times n$  的整係數矩陣，使得每一行及每一列之和都是相異的平方數。

【參考解答】

A.

1	15
0	49

B.

1	15	0
0	$1 \times 49$	$15 \times 49$
0	0	$49 \times 49$

C.

除對角線與上次對角線的元素之外，其餘位置皆取 0。

1	15						
	49	$15 \times 49$					
		$49 \times 49$	$15 \times 49 \times 49$				
			$49 \times 49 \times 49$	$15 \times 49 \times 49 \times 49$			
				$49 \times 49 \times 49 \times 49$			
						$15 \times 49^{n-3}$	
						$49^{n-2}$	$15 \times 49^{n-2}$
							$49^{n-1}$

可知各行的和依序為  $1, 64, 64 \times 49, 64 \times 49^2, \dots, 64 \times 49^{n-3}, 64 \times 49^{n-2}$ 。  
而各列的和依序為  $16, 16 \times 49, 16 \times 49^2, 16 \times 49^3, \dots, 16 \times 49^{n-2}, 49^{n-1}$ 。  
比較後可知，每行的和與每列的和皆相異，且皆為平方數。

## 口試題二

已知  $a, b, c, d, k$  均為實數且  $a \neq d$ ，若  $ab = kb + 1$ ， $bc = kc + 1$ ， $cd = kd + 1$ ， $ad = ka + 1$ ，試說明  $a, b, c, d$  的關係。

【參考解答】  $ab = kb + 1$ ， $b = \frac{1}{a - k}$ ， $c = \frac{a - k}{k^2 - ak + 1}$

$$dk^3 - adk^2 + dk = ad - kd - k^2 + ak - 1$$

$$ad = ka + 1，所以 (d - a)k^3 + 2(d - a)k = 0$$

$$(d - a)k(k^2 + 2) = 0，則 k = 0$$

$$ab = 1, bc = 1, cd = 1, ad = 1$$

$$故 a = c 且 b = d$$