

104 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題 (二)

編號：_____

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、若 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\frac{1}{2} \cos \theta \leq \tan \theta \leq \cos \theta$ ，則 $\sin \theta$ 的最大值是 (1)a，
(3分) 最小值是 (1)b。

二、設 p 為一質數，且滿足方程 $x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$ 有正整數解 x, y 。
(3分) 則所有 p 的可能值為 (2)。

三、已知有無窮多個正整數 n 滿足 n^3 的末兩位數字是 88，假設
(3分) $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6$ 是這些正整數中最小的六個。則 $n_6 =$ (3)。

四、 $\triangle ABCD$ 的外接圓為 A ，圓心亦記為 A ，設 $\angle BDC = \alpha$ 。延長 \overline{BA} 交圓 A 於
(3分) $F \neq B$ ，設 E 為射線 AF 上一點，且在圓 A 外，連接 \overline{EC} 並假設 $\angle E = \alpha/2$ ，
若 \overline{EC} 切圓 A 於 C ，則 $\overline{BE} : \overline{BC} =$ (4)。

五、已知 D 為 \mathbb{R}^2 上的平面區域，其中
(3分) $D = \{(x, y) : 3|x| + 2|y| \leq 24 \text{ 且 } y \geq x^3 + x^2 - 2x\}$ 。
區域 D 上之格子點 (x, y 座標均為整數的點) 的數目為 (5)。

六、正整數 n 的正因數中剛好有 30 個是完全平方數。則最小可能的 n 的質因
(3分) 數分解為 (6)。

七、有一個“寒”國偶像天團共有 10 個團員，某唱片公司為發行單曲，舉
(3分) 辦促銷活動。他們將每位團員的相片隨機放入單曲之中，若能搜集到每位團員的照片，即贈送一張演唱會門票。則平均要買 (7) 張單曲才能獲贈門票 (答案準確至最接近整數)。