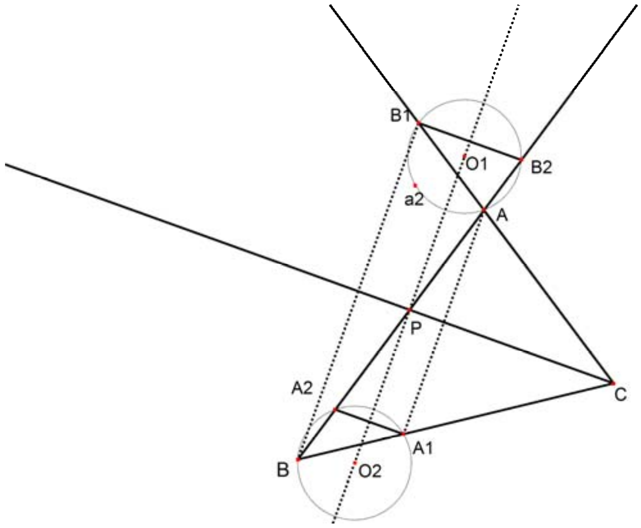
104 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）【解答】

一、【解】



只需證 ΔAB_1B_2, ΔBA_1A_2 的外接圓對 CP 對稱。

觀察：因 CP 為分角線，A_1, B_1 分別在 BC, CA 上，CP 垂直平分 BB_1.

i. 因 P 平分 BB_2，$B_1B_2 \| CP$，且 B_1B_2 的中垂線過 O_1 及 P;

同理 $A_1A_2 \| CP$，且 A_1A_2 的中垂線過 O_2 及 P.

因此，O_1, O_2, P 共線，且 A_1, A_2（B_1, B_2）對 O_1PO_2 互為對稱點。

ii. 令 a_2 為 A_2 對 CP 的對稱點，則因 O_1PO_2 垂直平分 A_1A_2，且它對 CP 的對稱線是自己，它也垂直平分 Aa_2.

所以 A 對 O_1PO_2 的對稱點為 a_2. 因此 a_2 在 ΔAB_1B_2 的外接圓上，ΔB_1Aa_2 與 ΔAB_1B_2 有相同的外接圓。

明顯 $\Delta B_1Aa_2, \Delta BA_1A_2$ 的外接圓對 CP 對稱。故得證。

二、【解】

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2+b^2}{2+a^2+b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{2+b^2+c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2+a^2}{2+c^2+a^2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2+a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2}{2+b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{2+c^2+a^2}\right)$$

由柯西不等式得

$$\frac{a^2+b^2}{2+a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2}{2+b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{2+c^2+a^2}\geq\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2}{6+2(a^2+b^2+c^2)}$$

另外

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)+2(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{c^2+a^2}\sqrt{a^2+b^2})$$
$$\geq 2(a^2+b^2+c^2)+2(b^2+ac)+2(c^2+ab)+2(a^2+bc)$$
$$=3(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2$$
$$=3(a^2+b^2+c^2)+9$$

所以

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2+a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2}{2+b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{2+c^2+a^2}\right)\geq\frac{3}{2}$$

帶回原式得證。

三、【證明】

$$(a)\ [sx+(1-s)y]^2=s^2x^2+(1-s)^2y^2+2s(1-s)xy(b)$$
$$=s^2x^2+(1-s)^2y^2+s(1-s)[(x^2+y^2-(x-y)^2]$$
$$=s(s+1-s)x^2+(1-s)(1-s+s)y^2-s(1-s)(x-y)^2$$
$$=sx^2+(1-s)y^2-s(1-s)(x-y)^2.$$

令 $z=tu+(1-t)v,$

$$0\leq(f(z)-z)^2=[f(z)-(tu+(1-t)v)]^2$$
$$=[tf(z)+(1-t)f(z)-tu-(1-t)v]^2 \qquad \text{由}(a)$$
$$=[t(f(z)-u)+(1-t)(f(z)-v)]^2$$
$$=t(f(z)-u)^2+(1-t)(f(z)-v)^2-t(1-t)[f(z)-u-(f(z)-v)]^2$$

$=t(f(z)-f(u))^2+(1-t)[f(z)-f(v)]^2-t(1-t)(u-v)^2$

$\le t(z-u)^2+(1-t)(z-v)^2-t(1-t)(u-v)^2$

$=[t(z-u)+(1-t)(z-v)]^2$ 由(a)

$=[z-(tu+(1-t)v)]^2=[z-z]^2=0$

由此得$(f(z)-z)^2=0$, 故 $f(z)=z$

四、【解】

設經過至少三點的直線有k且每條直線通過的點數分別是$a_1,a_2,...,a_k$

其中 $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_k\ge 3$.

由題目假設可得得關係式

$C_2^{15}-92=(C_2^{a_1}-1)+(C_2^{a_2}-1)+...+(C_2^{a_k}-1)$,

展開得$26+2k=a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+...+a_k(a_k-1)$.

因為$a_i\ge 3$所以$a_i(a_i-1)\ge 6$.

因為 15 個點且$a_i\ge 3$所以$k\le 5$.分情形討論：

$k=1$時$28=a_1(a_1-1)$無解;

$k=2$時$30=a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)$無解;

$k=3$時$32=a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+a_3(a_3-1)$解得$a_1=5,a_2=a_3=3$;

$k=4$時$34=a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+a_3(a_3-1)+a_4(a_4-1)$無解;

$k=5$時$36=a_1(a_1-1)+a_2(a_2-1)+a_3(a_3-1)+a_4(a_4-1)+a_5(a_5-1)$解得

$a_1=4,\ a_2=a_3=a_4=a_5=3$

當 15 個點中有一條 5 點共線兩條 3 點共線時

不同的三角形有$C_3^{15}-C_3^5-2C_3^3=443$個

當 15 個點中有一條 4 點共線四條 3 點共線時

不同的三角形有$C_3^{15}-C_3^4-4C_3^3=447$個

五、【解】

若$k=p_1p_2,\dots,p_rt^2$，其中$p_1,p_2,\dots,p_r$為質數，則$a_k=p_1p_2,\dots,p_rs^2$. 若$n=33$, 則相互配對的數組如下:

1. $1,4,9,16,25$,
2. $2,2\times4,2\times9,2\times16$,
3. $3,3\times4,3\times9$,
4. $5,5\times4$,
5. $6,6\times4$,
6. $7,7\times4$.

故$S(33)=2^3 3!4!5!=5\cdot3^3\cdot2^{10}$.