104 學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（一）　　編號：____

（時間二小時）

注意事項：

1.本試卷共五題**計算證明題**，滿分爲四十九分。

2.請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、(10 分) ΔABC 的 $\angle ACB$ 的分角線交 $\overline{AB}$ 於 P, A_1, B_1 分別為 A, B 對分角線 $\overleftrightarrow{CL}$ 的對稱點，A_2, B_2 分別為 A, B 對點 P 的對稱點，O_1, O_2 分別為 ΔAB_1B_2, ΔBA_1A_2 的外心，證明 $\angle O_1CA = \angle O_2CB$.

二、(10 分) 已知 a,b,c 都是正實數且 $a+b+c=3$, 證明

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}\le\frac{3}{4}.$$

三、(10 分) (a) 若 x, y, s 為實數，求證

$$[sx+(1-s)y]^2 = sx^2+(1-s)y^2-s(1-s)(x-y)^2.$$

(b) 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 為一函數且對所有實數 x,y, 不等式

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|$$

均成立。已知實數 u, v 滿足 $f(u)=u$, $f(v)=v$, 求證對所有 $0\le t\le 1$,

$$f(tu+(1-t)v)=tu+(1-t)v.$$

四、(10 分) 平面上有相異的 15 個點，將任意兩點連成一直線，共得到 92 條相異的直線，那麼有多少個不同的三角形可由這 15 個點形成?

五、(9 分) 設 n 為正整數。若數列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 滿足

(a) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 中，1, 2, …, n 恰好各出現一次，

(b) ka_k, $k=1, 2, \ldots, n$, 皆為完全平方數。

則稱它為完全數列。

例如：當 $n=9$ 時，數列 4, 8, 3, 1, 5, 6, 7, 2, 9 為完全數列。

令 $S(n)$ 為所有 n 項完全數列的個數，求 $S(33)$.