104 學年度台灣省第八區(屏東區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題

數學科筆試（二）參考解答

編號：________________

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 5 分，第三題 5 分，第四題 6 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 a, b 為正實數，如果 $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ 且 $\log_8 b + \log_4 a^2 = 7$，試求 ab 之值。

【參考解答】： 將此二式相加及利用對數基本性質，即

$$12 = \log_8 a + \log_4 b^2 + \log_8 b + \log_4 a^2 = \log_8 ab + \log_4 a^2b^2 = \log_8 ab + 2\log_4 ab$$

$$= \frac{1}{3}\log_2 ab + \log_2 ab = \frac{4}{3}\log_2 ab \Rightarrow \log_2 ab = 9 \Rightarrow ab = 2^9 = 512$$

二、設 a, b, c 為正實數，試證

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \ge (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)$$

【參考解答】

因為

$$(a^5 - a^2 + 3) - (a^3 + 2) = (a^3 - 1)(a^2 - 1) \ge 0$$

$$(b^5 - b^2 + 3) - (b^3 + 2) = (b^3 - 1)(b^2 - 1) \ge 0$$

$$(c^5 - c^2 + 3) - (c^3 + 2) = (c^3 - 1)(c^2 - 1) \ge 0$$

所以

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \ge (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)$$

三、試求所有滿足下列方程組的實數解(x, y)：

$$x + xy + y = 11 \quad \text{且} \quad xy^2 + x^2y = 30$$

【參考解答】

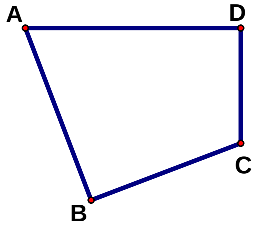
令 $x + y = a, xy = b$ 則 $a + b = 11, ab = 30$

$(a,b) = (5,6)$ 或 $(6,5)$

$x + y = 5, xy = 6$ 或 $x + y = 6, xy = 5$

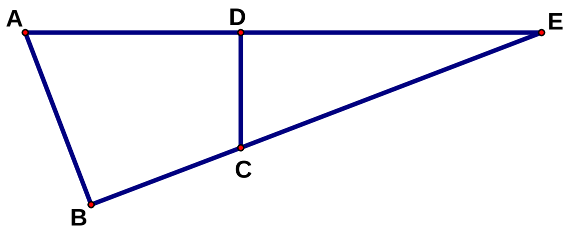
$(x, y) = (5,1), (1,5), (2,3), (3,2)$

四、四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A = 60^\circ, \angle B = \angle D = 90^\circ$ ，且 $\overline{AB} = 4, \overline{CD} = 2$ ，如圖所示，試求四邊形 $ABCD$ 的面積。



【參考解答】延長 $\overline{BC}, \overline{AD}$ ，交於一點 E ，如圖。 因為

$\angle A = 60^\circ, \angle B = 90^\circ \Rightarrow \angle E$



直角 ΔABE **中，** $\tan 30^\circ = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{BE} = 4\sqrt{3}$

直角 ΔCDE **中，** $\tan 30^\circ = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{DE} = 2\sqrt{3}$

所以直角 ΔABE **的面積=**$\dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BE} = 8\sqrt{3}$ **且**

直角 ΔCDE **的面積=**$\dfrac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{DE} = 2\sqrt{3}$ **，**

故四邊形 $ABCD$ **的面積=直角** ΔABE **的面積-直角** ΔCDE **的面積=**$6\sqrt{3}$ **。**