104學年度台灣省第八區(屏東區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題

數學科筆試（一）參考解答

編號：__________________

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 13 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 12 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。不可使用電算器。

(4)試題與答案卷一同繳回。

一、已知 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三個實根為 α,β,γ，且 $\alpha\le\beta\le\gamma$

a) 求證 $a^2-3b\ge 0$ 。

b) 求證 $\sqrt{a^2-3b}\le\gamma-\alpha \le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2-3b}$ 。

【參考解答】： 令 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 三實根為 α,β,γ， 則

$\alpha+\beta+\gamma=a$， $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$， $\alpha\beta\gamma=-c$

因 α、β、γ 為實數，所以 a、b、c 也為實數

(1) $a^2-3b=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$=\frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]\ge 0$$

(2) 令三根 α、β、γ，且 $\alpha\le\beta\le\gamma$

① $(\gamma-\alpha)^2-(a^2-3b)=-(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)\ge 0$

② $\frac{4}{3}(a^2-3b)-(\gamma-\alpha)^2=\frac{1}{3}(\gamma+\alpha-2\beta)^2\ge 0$

二、已知a,b,c為正實數，試證: $a(1-b),b(1-c),c(1-a)$至少有一數不會大於$\frac{1}{4}$。

【參考解答】：利用反證法，假設$a(1-b)>\frac{1}{4},b(1-c)>\frac{1}{4},c(1-a)>\frac{1}{4}$**，則考慮**

$$a(1-b)\times b(1-c)\times c(1-a)=a(1-a)\,b(1-b)\,c(1-c)$$

$\because \frac{a+(1-a)}{2}\geq\sqrt{a(1-a)}\ \therefore \frac{1}{4}\geq a(1-a)$ **同理** $\frac{1}{4}\geq b(1-b)$ **，** $\frac{1}{4}\geq c(1-c)$

$\therefore a(1-b)\times b(1-c)\times c(1-a)=a(1-a)\times b(1-b)\times c(1-c)\leq\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$ **(與假設矛盾)，**

故 $a(1-b),b(1-c),c(1-a)$ **不是全部超過** $\frac{1}{4}$ **。**

三、設一正 n 邊形周長為 A，其內切圓、外接圓周長分別為 B、C，求證 $A>\dfrac{B+C}{2}$。

【參考解答】

令正 n 邊形之一邊長＝a，其內切圓＝r，外接圓半徑＝R。則

$A=na,\quad B=2\pi r,\quad C=2\pi R$

$$\Rightarrow\quad \frac{\frac{a}{2}}{R}=\sin\frac{\pi}{n}\text{ ，}\ \frac{r}{R}=\cos\frac{\pi}{n}\quad \Rightarrow\ a=2R\sin\frac{\pi}{n}\text{ ，}\ r=R\cos\frac{\pi}{n}$$

所以 $A-\frac{B+C}{2}=na-\pi r-\pi R=2nR\sin\frac{\pi}{n}-\pi R\cos\frac{\pi}{n}-\pi R$

令 $\frac{\pi}{n}=x$，則 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 且

$$A-\frac{B+C}{2}=\pi R\left[\frac{2}{x}\sin x-\cos x-1\right]=\frac{\pi R}{x}[2\sin x-x\cos x-x]$$

$$=\frac{\pi R}{x}\left[2\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-x\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-x\right]$$

$$=\frac{\pi R}{x}\left[4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2x\cos^2\frac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi R}{x}\cdot 4\cos^2\frac{x}{2}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi R}{x}\cdot 4\cos^2\frac{x}{2}\left(\tan\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)>0$$

四、已知a,b為互質的二個正整數，使得$\dfrac{a+b}{a-b}$仍為一正整數，試證：$ab+1$和$4ab+1$中至少有一個數是完全平方數（即為某一整數的平方）。

【參考解答】

$\because \dfrac{a+b}{a-b}$**為正整數，令**$\dfrac{a+b}{a-b}=m$，$\therefore m>1$

$\therefore a+b=ma-mb, \therefore a(m-1)=b(m+1) \therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{m+1}{m-1}$

$\because (a,b)=1,\ \therefore \dfrac{a}{b}$**為最簡分數**，$\therefore m+1=ka$**且**$m-1=kb$，**其中** $\boldsymbol{k}$ **為正整數。**

將上二式相乘，得$k^2ab=m^2-1$

$\therefore k^2ab+1=m^2 \because k\,|\,(m-1,m+1),\ \ \therefore k\,|\,(m+1)-(m-1),\ \ \therefore k\,|\,2,\ \ \therefore k=1 \text{ or } 2$

(1) 若 $\boldsymbol{k}$ = 1，$\therefore ab+1=m^2$，**得證。**

(2) 若 $\boldsymbol{k}$ = 2，$\therefore 4ab+1=m^2$，**得證。**