

104 學年度台灣省第八區(屏東區)

高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題

數學科筆試(一)

編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 13 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 12 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。不可使用電算器。

(4)試題與答案卷一同繳回。

一、已知 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三個實根為 α, β, γ ，且 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$

a) 求證 $a^2 - 3b \geq 0$ (3 分)。

b) 求證 $\sqrt{a^2 - 3b} \leq \gamma - \alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{a^2 - 3b}$ (10 分)。

二、已知 a, b, c 為正實數，試證： $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ 至少有一數不會大於 $\frac{1}{4}$ 。

三、設一正 n 邊形周長為 A ，其內切圓、外接圓周長分別為 B, C ，求證 $A > \frac{B+C}{2}$ 。

四、已知 a, b 為互質的二個正整數，使得 $\frac{a+b}{a-b}$ 仍為一正整數，試證： $ab+1$ 和 $4ab+1$ 中至少有一個數是完全平方數（即為某一整數的平方）。